CONSEJO
FISCAL
AUTÓNOMO

# Modelo estocástico de deuda bruta del Gobierno Central de Chile

7/2025

Documento de trabajo N° 5

Autores:
Pedro Dosque
Mario Arend

# Modelo estocástico de la deuda bruta del Gobierno Central de Chile

Versión 1.0

## Resumen

Este documento de trabajo delinea la estructura e implementación del Modelo estocástico de la deuda bruta del Gobierno Central de Chile (MED) del Consejo Fiscal Autónomo (CFA). Entre las principales funciones del CFA se incluye evaluar la sostenibilidad de mediano y largo plazo de las finanzas públicas. Para el cumplimiento de este fin, es esencial la proyección de la deuda pública y el análisis de los factores macrofiscales que afectan su trayectoria, así como la incertidumbre en torno a ésta. El MED es una de las herramientas utilizadas por el CFA para dichas proyecciones y análisis de la incertidumbre en torno a las proyecciones de deuda del Gobierno Central.

El MED es un modelo estocástico que proyecta rango de trayectorias posibles de la deuda bruta al considerar la incertidumbre de las variables macrofiscales que determinan la ecuación de la dinámica de la deuda bruta. Siguiendo a Celasun *et al.* (2007), el modelo se compone de tres bloques principales en los que i) se modela la economía chilena a través de un modelo VAR, ii) se modela el balance primario del Gobierno Central a partir de una Función de Reacción Fiscal (FRF), y iii) se utilizan los resultados de los dos bloques anteriores para proyectar la deuda bruta, los activos del Tesoro Público y la deuda neta a 10 años, cuyas trayectorias se presenta en *fancharts* que muestran la trayectoria mediana así como la incertidumbre en torno a ésta estimación.

**Autores** : Pedro Dosque, analista de la Gerencia de Estudios del CFA, y Mario Arend, Gerente de Estudios del CFA.

**Revisado por** : Jorge Rodríguez, ex Presidente del CFA (2019-2025), Jeannette von Wolfersdorff, ex Consejera del CFA (2022-2025), Sebastián Izquierdo, Consejero del CFA, Gabriel Valenzuela, analista senior del CFA.

**Aprobado por** : Jorge Rodríguez, ex Presidente del CFA.

# INDICE

**Abreviaciones y Símbolos** ..... **4**

**Introducción** ..... **6**

**I. Marco teórico usado para la proyección de deuda pública** ..... **7**

Dinámica de la deuda bruta del Gobierno Central de Chile ..... 7

Descripción de los pasos para modelar la deuda pública ..... 11

**II. Implementación del modelo estocástico de la deuda bruta** ..... **22**

Insumos para el modelo: variables y parámetros ..... 22

Código ..... 26

Resultados ..... 32

**III. Conceptos teóricos de la modelación de la deuda bruta y su aplicación en Python** ..... **33**

Modelación de la economía: VAR ..... 33

Modelación de la reacción fiscal: FRF ..... 41

Estimación de la dinámica de la deuda ..... 42

Estimación de nivel prudente de la deuda bruta según BPMF ..... 48

**Referencias** ..... **50**

**Anexo 1: Determinación de retiros del FEES durante una crisis a partir de un modelo dinámico estocástico** ..... **51**

# Abreviaciones y Símbolos

## Abreviaciones

| | |
|---|---|
| BE | Balance Estructural |
| BPMF | Balance Primario Máximo Factible |
| CFA | Consejo Fiscal Autónomo |
| Filtro HP | Filtro Hodrick-Prescott |
| FMI | Fondo Monetario Internacional |
| FRED | *Federal Reserve Economic Data of the Federal Reserve Bank of St. Louis* |
| FRF | Función de reacción fiscal |
| GC | Gobierno Central |
| IPC | Índice de Precios al Consumidor |
| MED | Modelo estocástico de deuda bruta |
| PIB | Producto interno bruto |
| TCN | Tipo de cambio nominal |
| TP | Tesoro Público |
| UF | Unidad de fomento |
| VAR | Modelo de Vectores Autoregresivos |

## Símbolos

| | |
|---|---|
| $A^{TP}$ | Activos del Tesoro Público (en minúscula: como proporción del PIB) |
| $a^k$ | Duración de la deuda denominada en moneda $k$ |
| $B$ | Balance Fiscal |
| $B^p$ | Balance primario (en minúscula: como proporción del PIB) |
| $c$ | Precio efectivo del cobre en dólares por libra |
| $c^{ref}$ | Precio del cobre referencial en dólares por libra |
| $D$ | Deuda bruta (en minúscula: como proporción del PIB) |
| F | Indicador de variable dummy (también conocida como ficticia o indicadora) |
| $G$ | Gasto del Gobierno Central |
| $G^*$ | Gasto planificado para el año según la regla fiscal |
| $g$ | Tasa de crecimiento del PIB real |
| $I$ | Ingresos del Gobierno Central |
| $i$ | Tasa de interés nominal |
| $j^k$ | Tasa de interés nominal implícita de la deuda denominada en moneda $k$ |
| $k^{est}$ | $k$ estructural |
| $k^f$ | $k$ en moneda extranjera |
| $k^l$ | $k$ en moneda local |
| $k^{uf}$ | $k$ en UF |
| $k^p$ | $k$ en pesos chilenos |
| $M^{est}$ | Meta de Balance Estructural |
| $m^k$ | Tasa de interés nominal de la nueva emisión de deuda en moneda $k$ |
| $N$ | Distribución normal |
| $P$ | Nivel de precios según deflactor del PIB |
| $Q$ | PIB real |
| $r$ | Tasa de interés real |
| $t$ | Año |

| | |
|---|---|
| $U$ | Otros requerimientos de capital (en minúscula: como proporción del PIB) |
| $Y$ | PIB nominal |
| $Y^*$ | PIB tendencial |
| $Y^{gap}$ | Brecha del PIB |
| $\varepsilon$ | Tasa de depreciación del tipo de cambio nominal |
| $\theta^k$ | Proporción de deuda denominada en moneda $k$ en la deuda bruta |
| $\pi$ | Tasa de inflación según IPC |
| $\rho$ | Tasa de inflación según deflactor del PIB |

# Introducción

Las principales funciones del Consejo Fiscal Autónomo (CFA o Consejo) establecidas en la Ley N°21.148 incluyen evaluar la sostenibilidad de mediano y largo plazo de las finanzas públicas y difundir los resultados de estas evaluaciones. Para el cumplimiento de este fin, es esencial la proyección de la deuda pública y el análisis de los factores económicos y fiscales que afectan su trayectoria, así como la incertidumbre en torno a ésta. De este modo, la Gerencia de Estudios del CFA documenta en esta publicación el modelo estocástico de deuda bruta del Gobierno Central (GC) de Chile (MED) que utiliza el Consejo para sus análisis, con el objetivo de formalizar y explicar su funcionamiento[1].

En particular, el objetivo del MED es proyectar la deuda bruta en el mediano plazo (10 años), estableciendo un rango de trayectorias posibles, presentadas en gráficos conocidos como *fancharts*, dada la incertidumbre de las variables macrofiscales usadas como insumo para proyectar la dinámica de la deuda bruta. En este sentido, es un modelo estocástico, es decir, incorpora aleatoriedad a las variables macrofiscales para tomar en cuenta la incertidumbre inherente de la economía y las decisiones fiscales, de modo de obtener un rango de estimaciones posibles de la variable de análisis, la deuda bruta, que permite al CFA evaluar la sostenibilidad de la deuda y sus riesgos.

Por tanto, este modelo se diferencia del modelo determinístico de deuda bruta del GC que también utiliza el CFA en sus análisis[2]. Por un lado, incorpora la incertidumbre de las proyecciones de las variables macroeconómicas y fiscales, y el traspaso de esta incertidumbre a la proyección de la deuda bruta. Por tanto, en lugar de entregar solamente una proyección puntual de la deuda bruta, presenta una distribución de valores posibles de deuda para cada año del horizonte de proyección, que depende de los posibles valores que pueden tomar las variables macrofiscales en los próximos años. Esto permite al CFA evaluar la amplitud del riesgo en torno a la estimación central de la deuda bruta y la probabilidad de que se superen ciertos niveles de deuda.

Por otro lado, el MED, a diferencia del modelo determinístico, considera tanto la interacción entre las variables macroeconómicas, como la interacción entre estas variables con el balance fiscal, por lo que al evaluar escenarios alternativos en los cuales una de estas variable se altera, las demás variables reaccionan automáticamente a este cambio según las relaciones establecidas en el modelo[3].

El MED del GC de Chile se realiza a partir del marco de modelamiento planteado por Celasun *et al.* (2007) y considerado por el Fondo Monetario Internacional (FMI) para sus estimaciones estocásticas

[1] Este modelo es una herramienta que utiliza el Consejo para su análisis de sostenibilidad de las finanzas públicas, sin embargo, se debe enfatizar que las proyecciones presentadas por el CFA en sus informes son resultado también de los supuestos y juicios realizados por sus consejeros y el equipo del CFA, que se incorporan como insumos para la estimación del modelo.

[2] Ver Arend *et al*. (2025). En un modelo determinístico el resultado final se determina por los supuestos realizados sobre las variables, sin la presencia de aleatoriedad en las mismas. En el caso del modelo determinístico del CFA, se usa un modelo basado en las relaciones contables de las cuentas fiscales, por lo que las relaciones entre las variables usadas son ciertas y toda la incertidumbre en las proyecciones proviene de los supuestos usados para modelar dichas variables.

[3] En el modelo determinístico, si una variable macroeconómica varía, no afecta a las otras variables macroeconómicas. Por ejemplo, si aumenta el tipo de cambio nominal, no cambia la inflación, a pesar de que probablemente ésta sí se verá afectada. Para mantener la coherencia entre las variables, el cambio en la inflación se tendría que imputar de forma independiente en el modelo.

de la deuda de sus países miembros[4]. El FMI aplica cálculos estándar para todos los países, simplificando su MED para asegurar su aplicabilidad mediante un procedimiento uniforme. En el caso del modelo del CFA, al realizarse para un país específico, se realizan modificaciones dentro del marco de modelamiento planteado por Celasun *et al.* (2007) y el FMI para ajustarse mejor a la realidad de Chile.

Este documento es complementario a una planilla Excel con la base de datos utilizada y un código Python en el cual se implementa el modelo, y tiene dos objetivos. Primero, explicar las metodologías empleadas y transparentar las herramientas utilizadas por el Consejo. El segundo objetivo es servir como ayuda para la operación efectiva de la planilla Excel y el código Python, es decir, que cualquier persona con conocimientos de econometría y Python un nivel de usuario pueda obtener una proyección de la deuda bruta con el MED del CFA. De este modo, el CFA profundiza su compromiso con la transparencia de sus herramientas analíticas, poniendo a disposición de la ciudadanía tanto los códigos abiertos como un manual con la descripción detallada de los conceptos, datos y variables utilizadas en el análisis.

El documento se estructura de la siguiente manera. Primero se explica el marco teórico necesario para entender los resultados finales del modelo de proyección de la deuda bruta del GC, y luego se describe el procedimiento paso a paso usado en el MED. En la segunda sección, se indica brevemente cómo se opera la planilla Excel, con las fuentes y los supuestos para las variables usadas en la base de datos, así como el código Python. En la sección tres se explica más detalladamente la metodología usada para modelar la economía, establecer una relación entre esta última y el balance fiscal, calcular la dinámica de la deuda bruta, y cómo estimar un nivel prudente de deuda bruta mediante el método de deuda bruta compatible con el Balance Primario Máximo Factible (BPMF)[5]. Por último, también se presenta un anexo metodológico que explica el modelo para determinar los retiros del FEES durante una crisis según un modelo dinámico estocástico.

# I. Marco teórico usado para la proyección de deuda pública

En esta sección se presenta el marco teórico de la dinámica de la deuda pública aplicado al caso de la deuda bruta del GC de Chile con el fin de explicar los fundamentos tras las fórmulas implementadas en la planilla Excel y detallar las variables macroeconómicas y fiscales que se necesitan para realizar dichos cálculos. Luego, una vez obtenida la ecuación de la dinámica de la deuda bruta que se utiliza en el modelo, se describen los pasos para obtener una proyección estocástica de la deuda bruta basándose en el marco utilizado por el FMI mencionado previamente.

## Dinámica de la deuda bruta del Gobierno Central de Chile

Para proyectar la trayectoria de la deuda pública, primero se necesita identificar la dinámica de la deuda bruta del GC. Esta dinámica se caracteriza mediante una ecuación de movimiento de la deuda

[4] Ver FMI (2017), FMI (2021) y FMI (2022).

[5] Existen diversas metodologías para estimar el nivel prudente de deuda bruta, por ejemplo, los modelos de equilibrio general equipados con curva de Laffer, los modelos de fatiga fiscal, o los modelos de default logístico. El CFA ha recomendado utilizar un conjunto amplio de ellas para establecer este nivel con mayor robustez (ver documento en que se realiza dicha recomendación aquí), criterio que fue adoptado por el Ministerio de Hacienda al estimar dicho nivel a partir de tres metodologías distintas (Espacio fiscal utilizando una función de reacción fiscal, un modelo de probabilidad de no pago basado en evidencia internacional, un cálculo de deuda que maximiza el crecimiento económico).

bruta que determina cuáles son las variables macroeconómicas y fiscales relevantes para realizar la proyección.

La deuda bruta del GC de Chile[6] puede analizarse a partir de la restricción presupuestaria intertemporal del Gobierno Central[7], definida como:

$$D_t = (1 + i_t)D_{t-1} - B_t^p + U_t + (A_t^{TP} - A_{t-1}^{TP}) \tag{1}$$

En donde $D_t$ es la deuda bruta en el período $t$, $\mathrm{i_t}$ es la tasa de interés nominal, $B_t^p$ es el balance primario del GC, $U_t$ son otros requerimientos de capital[8], y $A^{TP}$ los activos del Tesoro Público. Esta ecuación indica que la deuda bruta puede aumentar debido al gasto por intereses proveniente de la deuda anteriormente emitida ($i_t D_{t-1}$), a un balance primario deficitario ($B_t^p$ negativo), a otros requerimiento de capital positivos (como la capitalización de una empresas pública), o a una acumulación de activos públicos del Tesoro.

Se puede expresar esta ecuación como porcentaje del PIB dividiéndola por el PIB nominal del período $t$ ($Y_t$). Sin embargo, considerando que $Y_t = P_t Q_t$, en donde $P_t$ se refiere a los precios (deflactor del PIB) en el año $t$ y $Q_t$ al PIB real, la ecuación se puede reescribir como

$$\frac{D_t}{P_t Q_t} = \frac{D_{t-1}}{P_t Q_t}(1 + i_t) - \frac{B_t^p}{P_t Q_t} + \frac{U_t}{P_t Q_t} + \left(\frac{A_t^{TP} - A_{t-1}^{TP}}{P_t Q_t}\right) \tag{2}$$

Luego, expresando las variables como porcentaje del PIB en minúsculas y además multiplicando por $\frac{P_{t-1}Q_{t-1}}{P_{t-1}Q_{t-1}}$, se obtiene

$$d_t = \frac{D_{t-1}}{P_{t-1}Q_{t-1}}(1 + i_t)\frac{P_{t-1}Q_{t-1}}{P_t Q_t} - b_t^p + u_t + \left(a_t^{TP} - \frac{a_{t-1}^{TP}}{P_{t-1}Q_{t-1}}\frac{P_{t-1}Q_{t-1}}{P_t Q_t}\right) \tag{3}$$

Por último, se puede reescribir la ecuación anterior usando la tasa de crecimiento real del PIB real $g_t$ y la tasa de inflación[9] $\rho_t$, para obtener

$$d_t = \frac{(1 + i_t)}{(1 + g_t)(1 + \rho_t)} d_{t-1} - b_t^p + u_t + \left(a_t^{TP} - \frac{a_{t-1}^{TP}}{(1 + g_t)(1 + \rho_t)}\right) \tag{4}$$

Por tanto, la dinámica de la deuda bruta como proporción del PIB también depende del crecimiento del PIB real y de la tasa de inflación según el deflactor del PIB, ya que un aumento en cualquiera de estas variables reduce la proporción de la deuda emitida previamente respecto al PIB, disminuyendo así la deuda bruta en $t$.

Para añadir mayor detalle a la modelación de la deuda bruta se puede considerar la composición de ésta de los activos. Si se considera la denominación en que se encuentran los bonos y créditos soberanos, la deuda del GC de Chile estaría compuesta por deuda en moneda local, denominada en pesos chilenos o UF, y deuda denominada en moneda extranjera[10]. Además, la deuda también se

[6] Más detalle de la derivación de esta ecuación puede encontrarse en Arend (2020).
[7] Ver por ejemplo Bohn (1998), Croce y Juan-Ramón (2003) y Arend *et al.* (2019).
[8] Estos corresponden a transacciones de activos financieros distintos a los del Tesoro Público (TP) y de pasivos financieros diferentes a la deuda bruta, que afectan las necesidades de financiamiento del Gobierno Central, tales como bonos de reconocimiento, compra de cartera de Crédito con Aval del Estado (CAE), capitalización de empresas públicas, entre otros.
[9] Calculada a partir del deflactor del PIB.
[10] Por simplicidad del modelo, no se descompone la deuda en moneda extranjera en las distintas divisas en que puede estar denominada.

compone de pasivos de distinta duración, por ejemplo, bonos soberanos a 5 años o a 20 años. Por otro lado, los activos del Tesoro Público se encuentran distribuidos en distintos fondos o categorías, por lo que para el modelo se consideran por separado los activos del Fondo de Estabilización Económica y Social (FEES), del Fondo de Reserva de Pensiones (FRP), y el resto de activos se agrupan en Otros activos del Tesoro Público (OATP). Considerando esto, y siguiendo a Madeiros (2012), la ecuación anterior se puede reescribir separando los componentes de la deuda de la siguiente forma:

$$d_t = \frac{\theta^F\left(1+j_t^f\right)(1+\varepsilon_t) + \theta^{UF}\left(1+j_t^{uf}\right)(1+\pi_t) + (1-\theta^F-\theta^{UF})\left(1+j_t^p\right)}{(1+g_t)(1+\rho_t)} d_{t-1} - b_t^p$$

$$+u_t + \left((a_t^{FEES} + a_t^{FRP} + a_t^{OATP}) - \frac{a_{t-1}^{FEES} + a_{t-1}^{FRP} + a_{t-1}^{OATP}}{(1+g_t)(1+\rho_t)}\right) \quad (5)$$

$$j_t^k = \left(1 - \frac{1}{a^k}\right) j_{t-1}^k + \frac{1}{a^k} m_t^k \ , \ \ k = \{f, uf, p\} \quad (6)$$

$$m_t^k = r_t^k + \pi_t \ , \ \ k = \{f, p\} \quad (7)$$

$$m_t^k = r_t^k \ , \ \ k = \{uf\} \quad (8)$$

$$r_t^{uf} = r_t^p = r_t^l \quad (9)$$

$$m_t^k \geq 0 \ \forall \ t, \qquad k = \{f, p\} \quad (10)$$

Donde $\theta^F$ y $\theta^{UF}$ son las proporciones de deuda denominada en moneda extranjera y en UF en la deuda total del GC, por lo que $(1-\theta^F-\theta^{UF})$ es la proporción de deuda denominada en pesos chilenos; ε es la depreciación del tipo de cambio nominal, π la tasa de inflación medida según IPC; $j^f$, $j^{uf}$ y $j^p$ son la tasa de interés nominal implícita de la deuda en moneda extranjera, en UF y en pesos chilenos, respectivamente; $a^{FEES}$, $a^{FRP}$ y $a^{OATP}$ son los activos en el FEES, FRP y Otros activos del Tesoro Público que no pertenecen al FEES Y FRP; $a^f$, $a^{uf}$ y $a^p$ representan la duración promedio de la deuda en moneda extranjera, en UF y pesos chilenos respectivamente; y $m_t^f$ y $m_t^p$ indican la tasa de interés nominal de la nueva emisión en el año $t$ de deuda en moneda extranjera y en pesos chilenos respectivamente, mientras que $m^{uf}$ es la tasa de interés de la nueva emisión de deuda en UF. Finalmente, $r_t^f$ y $r_t^l$ son la tasa de interés real de la nueva deuda emitida en el año $t$ en moneda extranjera y en moneda local.

Como se puede ver, el término $(1+i_t)$ en la ecuación (4) se descompone en la ecuación (5) en un promedio ponderado de los diferentes tipos de deuda (en pesos chilenos, UF y moneda extranjera) para reconocer que cada tipo posee diferentes tasas de interés ($j_t^k$) y duración ($a_t^k$). $j_t^k$ , con $k = \{f, uf, p\}$, son tasas de interés nominal efectivas de la deuda total en el año $t$, es decir, considera los intereses pagados tanto por la deuda emitida en años anteriores a $t$ como la nueva deuda emitida en el año t. Las ecuaciones (6) a (10) muestran cómo calcular dichas tasas de interés. La ecuación (7) indica que estas tasas de interés son un promedio ponderado de la tasa de interés nominal implícita en el año anterior $(t-1)$ y la tasa de interés de la nueva emisión de deuda en el año $t$, y los ponderadores señalan el supuesto simplificador de que la deuda se vence de forma constante año a año en una proporción de 1 dividido por la duración de la deuda. Es decir, por ejemplo, si la duración de la deuda denominada en UF es 10 años, entonces se vence un 10% de la deuda en el año $t$ (y en cada año en adelante), la que debe ser renovada a la tasa de interés imperante en el año

$t$ ($m_t^{uf}$). Por último, en la ecuación (5) el valor de la deuda denominada en moneda extranjera también se ajusta de un año a otro según la variación del tipo de cambio nominal, mientras que la deuda denominada en UF se ajusta de un año a otro según la inflación según IPC del año.

Por tanto, en lo que respecta a la estimación de la ecuación de la dinámica de la deuda bruta del GC, se puede notar que se necesitan proyecciones de seis variables macroeconómicas para proyectar la deuda bruta: el *crecimiento real del PIB*, el *deflactor del PIB*, la variación del IPC (*tasa de inflación*), la *tasa de depreciación del tipo de cambio nominal*, la *tasa de interés real de la deuda en moneda local*, y la *tasa de interés real en moneda extranjera*. Además, es necesario proyectar cinco variables fiscales: el *balance primario*, los otros requerimientos *de capital*, los *activos del FEES*, los *activos del FRP*, y los *OATP*. Por otro lado, también se debe establecer valores para los parámetros de la *proporción de deuda denominada en moneda extranjera* y *en UF*, y la *duración promedio de la deuda denominada en moneda extranjera*, *en UF*, y *en pesos chilenos*.

Por último, el modelo necesita como insumo valores para $j^f$, $j^{uf}$ y $j^p$ en el año anterior al inicio de proyecciones, que se llamarán $j_0^f$, $j_0^{uf}$ y $j_0^p$. Sin embargo, por restricciones de información, se tiene información histórica solamente de $j^l$ (la *tasa de interés nominal implícita de la deuda en moneda local*), y no de $j^{uf}$ y $j^p$ por separado. Por tanto, los parámetros $j_0^{uf}$ y $j_0^p$ se estiman a partir de $j_0^l$ según las ecuaciones (11) y (12) que suponen $j_0^p = j_0^{uf} + \bar{\pi}$, donde $\bar{\pi}$ es la *inflación anual promedio de los últimos 10 años*:

$$j_0^{uf} = j_0^l - \frac{1-\theta^F-\theta^{UF}}{1-\theta^F}\bar{\pi} \tag{11}$$

$$j_0^p = j_0^l + \frac{\theta^{UF}}{1-\theta^F}\bar{\pi} \tag{12}$$

Todos estas variables y parámetros utilizados en el modelo de deuda bruta, junto a su simbología, se resumen en el cuadro 1 que se muestra a continuación. Más adelante, cuando se explica la implementación del modelo, se detalla las fuentes y definiciones prácticas de estas variables y parámetros.

**Cuadro 1.** Variables y parámetros necesarios para proyección de la deuda bruta del GC

| Variables macroeconómicas | |
|---|---|
| $\boldsymbol{g}$ | Crecimiento real del PIB |
| $\boldsymbol{\rho}$ | Deflactor del PIB |
| $\boldsymbol{\varepsilon}$ | Tasa de depreciación del tipo de cambio nominal |
| $\boldsymbol{\pi}$ | Tasa de inflación (variación del IPC) |
| $\boldsymbol{r^l}$ | Tasa de interés real de la deuda en moneda local |
| $\boldsymbol{r^f}$ | Tasa de interés real de la deuda en moneda extranjera |
| **Variables fiscales** | |
| $\boldsymbol{b^p}$ | Balance primario |
| $\boldsymbol{u}$ | Otras necesidades de financiamiento |
| $\boldsymbol{a^{FEES}}$ | Activos del FEES |
| $\boldsymbol{a^{FRP}}$ | Activos del FRP |
| $\boldsymbol{a^{OATP}}$ | Otros activos del Tesoro Público distintos a los del FEES o FRP |

| Parámetros | |
|---|---|
| $\theta^f$ | Proporción de deuda en moneda extranjera |
| $\theta^{UF}$ | Proporción de deuda en UF |
| $a^p$ | Duración promedio de la deuda en pesos chilenos |
| $a^{uf}$ | Duración promedio de la deuda en UF |
| $a^f$ | Duración promedio de la deuda en moneda extranjera |
| $j_0^l$ | Tasa de interés nominal implícita de la deuda en moneda local en el año anterior al inicio de proyecciones |
| $j_0^f$ | Tasa de interés nominal implícita de la deuda en moneda extranjera en el año anterior al inicio de proyecciones |
| $\bar{\pi}$ | Tasa de inflación promedio de los últimos 10 años |

## Descripción de los pasos para modelar la deuda pública

En Celasun *et al*. (2007) los autores señalan que una evaluación de la sostenibilidad de la deuda pública requiere realizar juicios bajo incertidumbre y que las conclusiones alcanzadas están condicionadas a riesgos. En particular, destacan la incertidumbre respecto a la trayectoria futura del balance primario y las variables macroeconómicas que afectan a la deuda, como las tasas de interés y el crecimiento económico. Bajo este contexto cuestionaron los análisis determinísticos de la deuda pública, que usan supuestos específicos predefinidos de las variables macrofiscales y la política fiscal, en vez de considerar la incertidumbre inherente de estas variables. Del mismo modo, señalaron que la evaluación de riesgos mediante la simulación de escenarios alternativos *ad hoc*, es relevante pero limitada, ya que sólo evalúa casos específicos de riesgos y no considera la retroalimentación entre variables. Por ello, debía ser complementada con herramientas que pudieran mostrar un rango amplio de combinación de shocks macrofiscales y trayectorias posibles de la deuda.

Así, para considerar la incertidumbre en la dinámica de la deuda, Celasun *et al*. (2007) proponen un enfoque estocástico en que se incluye un número grande de *shocks* aleatorios a las variables macroeconómicas -provenientes de una distribución conjunta estimada a partir de un modelo de la economía-, junto con una política fiscal endógena que depende del ciclo económico. De este modo, los autores plantean un algoritmo compuesto de tres bloques para estimar la deuda pública: 1) estimar un modelo de vectores autoregresivos (VAR) compuesto de las variables no fiscales en la ecuación de movimiento de la deuda bruta –presentada en el apartado anterior-, a partir del cual se simulan series de *shocks* económicos y trayectorias para las variables no fiscales consistentes con estos *shocks*; 2) una Función de Reacción Fiscal (FRF) que relaciona el balance primario con el ciclo económico, la deuda pública y otras variables de control, como los rezagos de la política fiscal; y 3) la ecuación de la dinámica de la deuda bruta, que es estimada recursivamente a partir de las variables macroeconómicas y fiscales obtenidas en los bloques 1 y 2.

El resultado de este proceso es un *fanchart*, un gráfico que presenta la incertidumbre en las proyecciones de serie de tiempo a través de áreas sombreadas en torno a una proyección central, que representa la trayectoria más probable. Estas áreas sombreadas muestran el rango entre distintos percentiles, por ejemplo, los percentiles 5, 20, 80 y 95, de la distribución de resultados para cada periodo. Dado que la incertidumbre aumenta con el horizonte de proyección, el área sombreada se va expandiendo progresivamente, asemejándose a una figura de abanico.

Este enfoque estocástico fue incluido por el FMI en su marco de análisis de sostenibilidad de la deuda pública de sus países miembros con acceso al mercado de capitales en 2013 (FMI, 2013) y perfeccionado en su revisión de 2022 (FMI, 2022). Sin embargo, se diferencia de Celasun et *al.* (2007) en que el escenario base es calculado con un modelo determinístico, en torno al que se añade un *fanchart,* calculado a través de una matriz de varianzas-covarianzas de las variables económicas, en vez de un modelo VAR, lo que reduce los requerimientos de información para realizar la estimación.

El MED del Gobierno Central del CFA se basa en el trabajo de Celasun et *al.* (2007), pero considera también el marco de análisis de la deuda pública del FMI, así como otros avances en la literatura[11]. Los pasos para realizar esta estimación son los siguientes

1. Establecer la ecuación de dinámica de la deuda bruta a usar.
2. Modelar la economía a través de un modelo VAR.
3. Simular series de *shocks* a las variables no fiscales de la ecuación de dinámica de la deuda bruta y proyectar trayectorias posibles de estas variables.
4. Modelar la relación macrofiscal a través de una FRF.
5. Simular series de *shocks* fiscales y proyectar las trayectorias posibles de las variables fiscales.
6. Proyectar trayectorias posibles de la deuda bruta del GC a partir de las trayectorias posibles de las variables macrofiscales.
7. Calcular estadísticos a partir de los resultados y graficar resultados.
8. (Opcional) Estimar un nivel prudente de deuda a partir del método de BPMF.

A continuación se describe cada uno de estos pasos, sin embargo, se deja la explicación metodológica más detallada para la sección III. Por otro lado, en la siguiente sección se explica el uso del código Python y la planilla Excel para implementar el modelo.

### 1. Establecer la ecuación de dinámica de la deuda bruta a usar

La ecuación de dinámica de la deuda bruta (Ecuación (5)) muestra la evolución de la razón deuda bruta a PIB. Ésta se obtuvo en la sección anterior, y como se puede notar, es una ecuación recursiva. Es decir, para obtener la deuda pública del año $t+1$, se requiere el valor de ésta en el año $t$, y así hasta el fin del horizonte de proyección. En esta formulación de la ecuación, la deuda evoluciona según cuatro términos: un primer término, conocido como dinámica automática de la deuda, que depende de la deuda bruta del año anterior y las variables no fiscales[12], y tres términos que dependen directamente de la política fiscal, el balance primario, los otros requerimientos de capital y los activos del Tesoro Público. En el paso 2 y 3 se simulan las variables necesarias para obtener el primer término, mientras que en los pasos 4 y 5 se simulan las variables necesarias para obtener los otros tres términos.

### 2. Modelar la economía a través de un modelo VAR

La incertidumbre de las condiciones macroeconómicas futuras plantea riesgos en la trayectoria de la deuda bruta. Por ejemplo, si la tasa de interés local o el tipo de cambio aumentan más de lo esperado, la deuda bruta del GC probablemente también aumentará más de lo esperado. Esta

[11] Otros estudios sobre modelación estocástica relacionados con Celasun *et al.* (2007) son Tanner y Samake (2008), Frank y Ley (2009), Hajdenberg y Romeu (2010), Kawakami y Romeu (2011) y Madeiros (2012).

[12] Aunque a este término se le conoce como dinámica automática de la deuda, se debe considerar que las variables macroeconómicas pueden ser afectadas por la política fiscal y, en particular, las tasas de interés que paga la deuda pública dependen directamente de la gestión de deuda pública realizada por el gobierno.

incertidumbre se modela a través de simulaciones estocásticas que consideran la interrelación entre las variables macroeconómicas y posibles *shocks* a estas variables[13]. Incorporar la correlación entre estos *shocks* es clave porque muchas veces ocurren en conjunto, por ejemplo, durante una crisis económica podría a la vez depreciarse el tipo de cambio nominal y caer el crecimiento económico, afectándose mutuamente tanto en el mismo periodo, como con rezago en el futuro. Al respecto, un modelo simple que permite considerar estas interacciones es el modelo VAR en su forma reducida o no estructural.

Los modelos VAR son herramientas usadas comúnmente en macroeconomía para hacer proyecciones, realizar inferencia estructural y dar asesoramiento sobre políticas públicas (Stock y Watson, 2001). En la práctica, un VAR es un sistema lineal de $l$ variables e igual número de ecuaciones, en las que cada variable es explicada por sus propios valores pasados y los valores actuales y pasados de las otras variables en el sistema. De este modo, capturan la dinámica e interrelaciones entre múltiples series de tiempo que se influyen entre sí simultáneamente y con rezago.

En el MED del CFA se utiliza una base de datos trimestral de variables económicas para estimar el modelo VAR. Este modelo consiste de siete variables, las seis necesarias para estimar la ecuación de la dinámica de la deuda, ya mostradas más arriba, y el precio del cobre real, que es necesario para la simulación de la FRF. En este VAR se utiliza un rezago de las variables, es decir, el valor de cada variable se explica por los valores del trimestre anterior de las siete variables y de los valores contemporáneos del resto de las variables. Esto se conoce como un VAR(1). A modo de ejemplo, para mayor claridad, un VAR(1) con dos variables se puede representar a través del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_t^1 = \beta_1 + \beta_{12} x_t^2 + \delta_{11} x_{t-1}^1 + \delta_{12} x_{t-1}^2 + \mu_t^1 \tag{13}$$

$$x_t^2 = \beta_2 + \beta_{21} x_t^1 + \delta_{21} x_{t-1}^1 + \delta_{22} x_{t-1}^2 + \mu_t^2 \tag{14}$$

Donde $x^1$ y $x^2$ son las dos variables, $\alpha$, $\beta$ y $\delta$ los parámetros a estimar, por ejemplo, $\delta_{12}$ es el efecto rezagado de la variable $x^2$ sobre $x^1$; mientras que $\mu^1$ y $\mu^2$ son innovaciones puras independientes de valores contemporáneos o rezagados de las variables del modelo[14]. A esta representación se le llama forma estructural, y no se puede estimar sin realizar supuestos adicionales sobre la estructura de la economía ya que sufre de un problema de simultaneidad entre las variables. Sin embargo, no se busca identificar innovaciones puras en el MED, por lo que no es necesario estimar un VAR en forma estructural. Por esto, se utiliza la forma reducida o no estructural del VAR, que se obtiene tras reescribir el sistema anterior de manera de eliminar los efectos contemporáneos de las ecuaciones:

$$x_t^1 = \upsilon_1 + \varphi_{11} x_{t-1}^1 + \varphi_{12} x_{t-1}^2 + \eta_t^1 \tag{15}$$

$$x_t^2 = \upsilon_2 + \varphi_{21} x_{t-1}^1 + \varphi_{22} x_{t-1}^2 + \eta_t^2 \tag{16}$$

Donde los $\upsilon$ y $\varphi$ son los parámetros a estimar, y $\eta^1$ y $\eta^2$ son los *shocks* a las variables que permiten realizar las simulaciones necesarias para el MED. Estos *shocks* ya no son innovaciones puras del VAR en forma estructural, sino que cada uno es una combinación de $\mu^1$ y $\mu^2$. Sin embargo, para el MED

[13] En este documento se utiliza el término *shock* como la innovación o perturbación de una variable del modelo en un periodo $t$ respecto a su comportamiento predicho para el periodo $t$ por sus variables explicativas, es decir, es el residuo de la forma reducida del modelo VAR, como se verá más adelante.

[14] Estas innovaciones son conocidas como *shocks* estructurales.

no se busca identificar estas innovaciones puras, sino que obtener una medida de la variabilidad del impacto que tienen los *shocks* en las variables económicas para simular posibles trayectorias futuras de éstas. Esta medida de la variabilidad es la matriz de varianzas-covarianzas de los *shocks*. Así, se supone que cada *shock* se comporta como una distribución normal de media 0 y varianza $\sigma_l^2$, donde $l = 1, 2$. Pero al estar ambos compuestos por una combinación de las mismas innovaciones puras, generalmente están correlacionados y tendrán una covarianza distinta de cero. De esta forma, los *shocks* del ejemplo tendrán una matriz de varianzas-covarianzas de la siguiente forma:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Donde $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ es la covarianza entre los dos *shocks*. Por tanto, los *shocks* siguen una distribución normal bivariada con distribución $\eta_t \sim N_2(0, \Omega)$.

El VAR en forma reducida del MED contiene siete variables, pero sigue la misma lógica del ejemplo recién expuesto, con más parámetros a estimar y *shocks* que siguen una distribución normal multivariada ($N_7$). El modelo VAR se puede estimar utilizando los métodos de Mínimos Cuadrados Ordinarios o Máxima Verosimilitud, lo que en el caso del MED se implementa en Python. Los resultados serán estimaciones de los parámetros $\nu$ y $\varphi$ y los elementos de la matriz de varianzas covarianzas $\Omega$, lo que es suficiente para simular trayectorias futuras para las variables económicas.

En el modelo realizado se estima un VAR un poco más complejo que el recién expuesto. En pocas palabras, por un lado, se introducen restricciones de largo plazo a las variables para que converjan a valores considerados de equilibrio, como que el crecimiento económico converja al crecimiento tendencial en largo plazo. Y, por otro lado, siguiendo a la literatura reciente, se ajusta la volatilidad del modelo para considerar de forma ponderada el *shock* extremo de la pandemia de Covid-19, dado que de no realizarse, podría causar resultados incongruentes[15]. El modelo completo se explica en las secciones II y III, junto a su implementación.

### 3. Simular series de *shocks* a las variables no fiscales de la ecuación de dinámica de la deuda bruta y proyectar trayectorias posibles de estas variables

Con los resultados obtenidos en el paso anterior se puede simular trayectorias futuras para las variables económicas, extrayendo valores para los *shocks* desde la distribución normal multivariada estimada. Para esto, primero se extrae aleatoriamente de la distribución normal multivariada estimada un vector con el *shock* para cada variable. Estos serán los *shocks* para el primer trimestre a simular. Este proceso se repite del mismo modo para obtener los *shocks* del segundo trimestre a simular; y así hasta obtener *shocks* para todo el horizonte de proyección.

Luego se proyectan las variables para el primer trimestre a simular usando las ecuaciones del modelo VAR utilizado en el paso 1, en el que se reemplazan los parámetros estimados, los valores de las variables en el último trimestre con datos efectivos (que sería el periodo $t - 1$ para el primer trimestre a simular) y el vector de *shocks* para el primer trimestre. Una vez obtenidas las simulaciones para el primer trimestre, se puede proceder a realizar lo mismo con el segundo trimestre, usando los mismos parámetros estimados, los valores simulados del primer trimestre (que sería el periodo $t - 1$ para el segundo trimestre a simular) y el vector de *shocks* para el segundo

[15] Léase Lenza y Primiceri (2020) para mayor detalle sobre por qué incluir el periodo de la pandemia de Covid-19 sin modificaciones puede alterar los resultados de un modelo VAR.

trimestre; y así hasta obtener las trayectorias de las variables económicas para todo el horizonte de proyección.

A modo de ejemplo, siguiendo el caso del paso 1, suponga que en el último trimestre con datos efectivos las variables tienen los valores $x_0^1 = 2$ y $x_0^2 = 3$, los parámetros estimados son $[\nu_1, \nu_2, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{21}, \varphi_{22}\ ] = [1{,}5\ ,\ 1{,}0\ ,\ 0{,}5\ , -0{,}2\ ,\ 0{,}6\ ,\ 0{,}1]$, y de la distribución normal bivariada estimada para los *shocks* el software utilizado extrae aleatoriamente el vector $[\eta_1^1, \eta_1^2\ ] = [-0{,}3\ , 0{,}2]$. Con esta información se puede obtener los valores para las dos variables en el primer trimestre a simular, reemplazando en las ecuaciones del VAR(1) de más arriba:

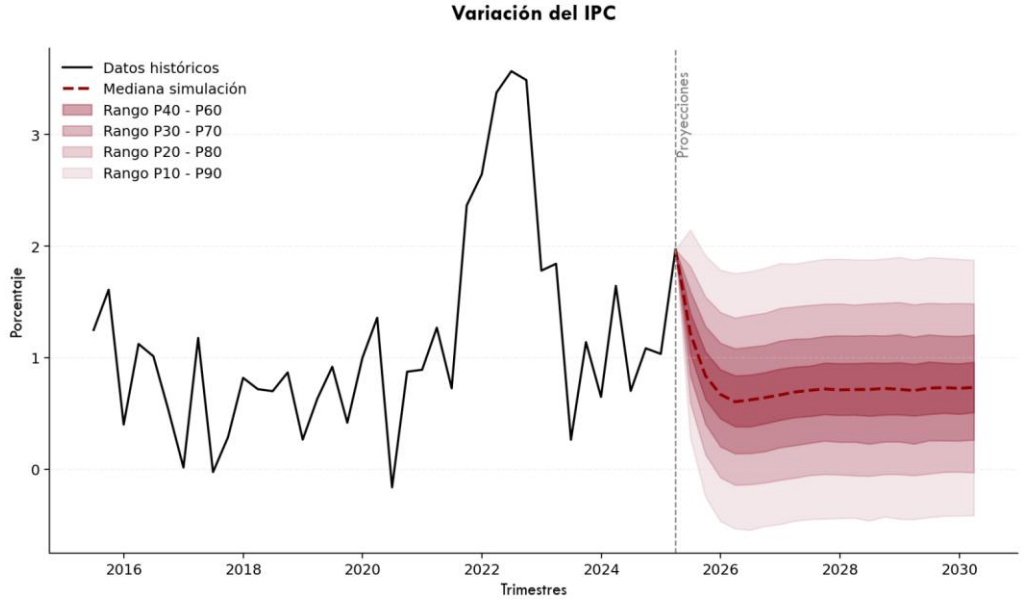
$$x_1^1 = 1{,}5 + 0{,}5 * 2 - 0{,}2 * 3 - 0{,}3 = 1{,}6$$

$$x_1^2 = 1 + 0{,}6 * 2 + 0{,}1 * 3 + 0{,}2 = 2{,}7$$

Luego, se puede utilizar $x_1^1 = 1{,}6$ y $x_1^2 = 2{,}7$ junto a nuevos *shocks* para simular $x_2^1$ y $x_2^2$, y así hasta el final de horizonte de proyección.

Este proceso se realiza 20.000 veces[16], obteniendo 20.000 simulaciones de las trayectorias trimestrales de las variables económicas, lo que permite obtener una distribución de los valores que podría tener cada variable económica en el horizonte de proyección. Estos resultados se anualizan, de forma que puedan ser utilizados en la ecuación de la dinámica de la deuda bruta, que ocupa datos anuales.

Abajo se presenta un ejemplo de un gráfico con el resultado para una de las variables, la variación trimestral del IPC (o inflación trimestral). La simulación de 20.000 trayectorias para $h$ trimestres se consolida en un *fanchart* que muestra la mediana de las simulaciones, así como los percentiles de la distribución de simulaciones según la sombra roja, como señala la leyenda del gráfico.




[16] La cantidad de trayectorias simuladas de todas las variables del modelo se decidió a partir de la estabilización de los resultados de la media de la deuda bruta, el balance primario y los gastos por intereses, y los deciles de la distribución de la deuda bruta para cada año de la simulación.

## 4. Modelar la relación macrofiscal a través de una FRF

Para simular la trayectoria de la deuda bruta también se requiere simulaciones del balance primario del GC. En el paso 4 se realiza esto a través de una Función de Reacción Fiscal (FRF) que relaciona variables macroeconómicas con el balance primario, como una variable resumen de la situación fiscal del país. La FRF no intenta demostrar una causalidad entre estas variables, sino que extraer información de variables claves que están correlacionadas con las decisiones macropresupuestarias: el nivel de deuda y su sostenibilidad, el ciclo económico y la persistencia del presupuesto de un año a otro (Celasun *et al.* 2007).

En general, una FRF es una ecuación que relaciona un nivel de balance primario con las condiciones macrofiscales prevalentes de acuerdo con el comportamiento fiscal histórico del país. Existen diferentes especificaciones posibles para una FRF, dependiendo de la información disponible y el país para el cual se modela la relación. En el caso de Chile, considerando que su política fiscal se ha guiado por una regla fiscal de Balance Estructural (BE) –o más precisamente, Cíclicamente Ajustado- desde 2001 en adelante, se plantea la siguiente ecuación a estimar a partir de una serie de tiempo de datos anuales:

$$b_t^p = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t^{gap} F_t^{gap>0} + \alpha_2 Y_t^{gap}\left(1 - F_t^{gap>0}\right) + \alpha_3\left(c_t - c_t^{ref}\right)F_t^{reglaBE} + \alpha_4 d_{t-1} + \alpha_5 d_{t-1}^2 + \alpha_6 d_{t-1}^3 + \alpha_7 ret_t^{FEES} + \alpha_8 F_t^{reglaBE} + \alpha_9 F_t^{crisis} + \mu_t \quad (17)$$

Donde $Y_t^{gap}$ es la brecha del PIB real en el año $t$ y $F_t^{gap>0}$ es una variable dummy que toma el valor 1 si la brecha del PIB real es positiva y 0 si es negativa. De esta forma se diferencia el impacto del ciclo económico sobre la situación fiscal cuando el país está en un ciclo económico recesivo de cuando se encuentra en uno expansivo. $c_t^{ref}$ es el precio de referencia del cobre, por lo que $\left(c_t - c_t^{ref}\right)$ es la brecha del precio del cobre, mientras que $ret_t^{FEES}$ son los retiros de activos del FEES distintos a los realizados para aportar activos al FRP, como proporción del PIB. Por su parte, $F_t^{reglaBE}$ es una variable dummy que toma el valor 1 desde 2001 en adelante para separar la muestra entre el periodo en que no se utilizaba una regla de BE y el periodo en que sí se utiliza; y $F_t^{crisis}$ es una dummy que toma el valor 1 cuando el crecimiento del PIB real es negativo en el año $t$, lo que se considera como una variable proxy de una crisis económica, con el fin de considerar el mayor gasto público que suele ocurrir durante estos periodos.

En la ecuación también se incluye la deuda bruta del periodo anterior para considerar ajustes fiscales realizados para mantener la sostenibilidad fiscal, por ejemplo, se esperaría un incremento en el balance primario en la medida que la deuda bruta sea mayor, con el objetivo de reducirla a un nivel sostenible. Además, se incluyen términos cuadráticos y cúbicos para considerar la posibilidad de que el balance fiscal responda a aumentos de la deuda de forma no lineal, por ejemplo, porque la deuda bruta es tan alta que el balance primario no puede mantener el paso de los mayores pagos por intereses, lo que Ghosh *et al*. (2013) llama "fatiga fiscal".

Por último, se introduce la persistencia del balance primario en la innovación autocorrelacionada $\mu_t$ ($\mu_t = \psi\mu_{t-1} + \xi_t$), dado que los presupuestos del sector público se realizan a partir de ajustes de los del año anterior, además de que los ingresos fiscales también suelen mostrar persistencia temporal. De este modo, $\xi_t$ es el *shock* fiscal que sigue una distribución normal $\xi_t \sim N\left(0, \sqrt{(1-\psi^2)}\sigma_\mu\right)$, en donde $\sigma_\mu$ es la varianza de la innovación $\mu_t$.

Los resultados de esta regresión serán estimaciones para los parámetros $\alpha$ de la ecuación, y $\psi$ y $\sigma_\mu$ del proceso autocorrelacionado de la innovación, lo que es suficiente para simular trayectorias futuras del balance primario.

### 5. Simular series de *shocks* fiscales y proyectar las trayectorias posibles de las variables fiscales

Con los resultados obtenidos en el paso anterior se puede simular trayectorias futuras para el balance primario extrayendo valores para el *shock* fiscal $\xi_t$ desde la distribución normal estimada $N\left(0, \sqrt{(1-\hat{\psi}^2)}\hat{\sigma}_\mu\right)$ donde $\hat{}$ simboliza el parámetro estimado. Este proceso se realiza de manera similar al paso 3, pero depende del nivel de deuda bruta, por lo que se debe realizar de manera iterativa junto a la simulación de la deuda bruta en el paso 6.

Para esto primero se extrae el *shock* fiscal para el primer año a simular aleatoriamente de la distribución normal estimada. Esto se repite del mismo modo para cada año hasta obtener *shocks* para todo el horizonte de proyección. Luego se proyecta el balance fiscal para el primer año a simular usando la ecuación utilizada en el paso 4, en el que se reemplazan los parámetros estimados, los valores de las variables en el último año con datos efectivos (que sería el periodo $t-1$ para el primer año a simular) y el *shock* fiscal para el primer año.

Una vez obtenido el balance primario para el primer año, se debe simular la deuda bruta para el primer año de la simulación (ver paso 6). Una vez obtenida la deuda bruta, se procede a realizar el mismo proceso con el segundo año, usando los mismos parámetros estimados, el balance fiscal simulado del primer año (que sería el periodo $t-1$ para el segundo año a simular), las variables macroeconómicas simuladas para el segundo año (brecha del PIB y brecha del precio del cobre), y el *shock* para el segundo año; y así hasta obtener de manera iterativa las trayectorias de las variables económicas para todo el horizonte de proyección.

En este paso, de manera opcional se permite ingresar de forma manual el valor del balance primario del primer año de la simulación, que en la práctica es el año en curso, dado que puede existir suficiente información para realizar una mejor estimación del balance primario que la realizada a partir de los datos históricos.

Por otro lado, también se debe simular los otros requerimientos de capital como proporción del PIB, $u_t$. En este caso, ya que no se posee información suficiente para modelar esta variable de manera más precisa, se simula a partir de la información de sus valores pasados como su media histórica más una innovación autocorrelacionada (un AR(1) en los errores con una constante), de modo que los *shocks* a esta variable tengan persistencia.

Finalmente, también se deben simular las trayectorias de los activos del Tesoro Público, divididos en $a^{OATP}$, $a^{FRP}$ y $a^{FEES}$. Para el caso de los OATP, estos se modelan a partir de su información histórica con un modelo simple de corrección de errores, en que los activos como proporción del PIB convergen en largo plazo a su media de los últimos 10 años[17] al corregir desviaciones de corto plazo respecto a esta media -sin ser financiados vía la venta de otros tipos de activos-. Por su parte, los aportes al FRP y al FEES se modelan según la Ley N°20.128 que los rige[18], señalando que estos

[17] En esta media no se considera los activos del Fondo para la Educación, que ya no contiene activos.
[18] La metodología es revisada cuando existen modificaciones a la ley.

dependen del balance fiscal del año anterior, mientras que los retiros de activos del FRP se suponen en 0,1% del PIB anuales, que es el retiro promedio de los últimos años, y para los retiros del FEES se supone que se realizan sólo si hay una crisis económica y la brecha del PIB es menor o igual a -3,0%, y se considera un factor de retiro de 2 veces el crecimiento del PIB real del año[19]. Como el valor de los activos del Tesoro Público dependen del balance fiscal simulado, también se modelan iterativamente junto a este último y la deuda bruta.

### 6. Proyectar trayectorias posibles de la deuda bruta del GC a partir de las trayectorias posibles de las variables macrofiscales

En este paso se simulan trayectorias futuras para la deuda bruta del GC según la ecuación de la dinámica de la deuda bruta, la que se repite a continuación por conveniencia:

$$d_t = \frac{\theta^F\left(1+j_t^f\right)(1+\varepsilon_t) + \theta^{UF}\left(1+j_t^{uf}\right)(1+\pi_t) + (1-\theta^F-\theta^{UF})\left(1+j_t^p\right)}{(1+g_t)(1+\rho_t)} d_{t-1} - b_t^p + u_t$$
$$+\left((a_t^{FEES}+a_t^{FRP}+a_t^{OATP}) - \frac{a_{t-1}^{FEES}+a_{t-1}^{FRP}+a_{t-1}^{OATP}}{(1+g_t)(1+\rho_t)}\right)$$

$$j_t^k = \left(1-\frac{1}{a^k}\right) j_{t-1}^k + \frac{1}{a^k} m_t^k \ , \ \ k=\{f,uf,p\}$$

$$m_t^k = r_t^k + \pi_t \ , \ \ k=\{f,p\}$$

$$m_t^k = r_t^k \ , \ \ k=\{uf\}$$

$$r_t^{uf} = r_t^p = r_t^l$$

$$m_t^k \geq 0 \ \forall \ t, \qquad k=\{f,p\}$$

En los pasos anteriores se fijaron los parámetros del modelo, simularon las variables económicas necesarias para calcular esta ecuación, y se simularon *shocks* fiscales para $b_t^p$, además de trayectorias para los otros requerimientos de capital. Sin embargo, aún hay datos faltantes para calcular la ecuación.

Por un lado, se tiene que calcular las tasas de interés implícitas de la deuda del GC, $j_t^k$, a partir de los valores iniciales de éstas para el último año con cifras efectivas y las variables económicas simuladas. Por otro lado, se deben generar trayectorias de algunas variables más para las simulaciones del balance primario mediante la FRF mostrada anteriormente: la brecha del PIB y la brecha del precio del cobre. La brecha del PIB se estima para cada trayectoria futura del PIB real con un filtro Hodrick-Prescott (HP) sobre la serie entre 1990 y el último año con datos simulados. En cuanto a la brecha del precio del cobre, se estima primero una regresión de la variación del precio de referencia del cobre sobre las variaciones pasadas del precio del cobre, de modo de construir el precio referencial a partir de los resultados de dicha regresión. Finalmente, con las trayectorias simuladas del precio del cobre y su referencial, se puede calcular la brecha del cobre.

Ya con todas las variables necesarias simuladas se procede a calcular la deuda bruta y el balance primario de manera iterativa para todo el horizonte de proyección, tal como se explicó en el paso anterior. Este proceso se realiza 20.000 veces, obteniendo 20.000 simulaciones de las trayectorias de la deuda bruta, el balance primario, los gastos por intereses y el balance fiscal, lo que permite

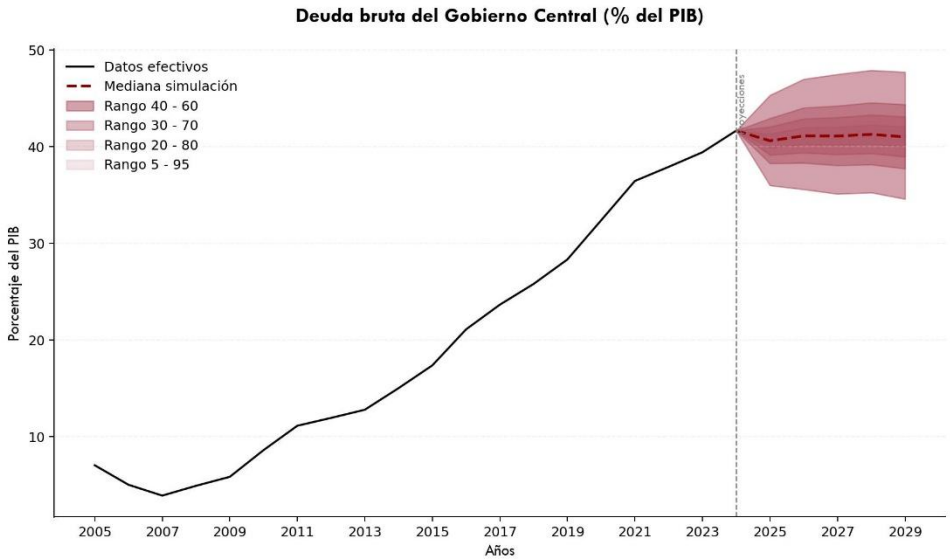
[19] La metodología para obtener el monto retirado del FEES se explica en el anexo 1, basado en Arend (2025).

tener una distribución de los valores que podría tener cada una de estas variables fiscales en el horizonte de proyección.

### 7. Calcular estadísticos a partir de los resultados y graficar resultados

A partir de las simulaciones realizadas en el paso anterior se calculan estadísticos anuales de la deuda bruta, los activos del Tesoro Público, la deuda neta, el balance primario, los gastos por intereses y el balance total, que resumen los resultados de las trayectorias simuladas. En particular, se calculan la media y la mediana para cada año de cada una de las distribuciones de frecuencia de estas variables, además de la desviación estándar, *skewness* y *kurtosis*[20] de las simulaciones de la deuda bruta.

También se calcula los deciles –o percentiles 10, 20, …, 90- de la distribución de frecuencia de cada año de las seis variables. Estos últimos permiten graficar las trayectorias simuladas en un *fanchart* como el que se muestra a continuación para la deuda bruta. En éste se muestra la mediana de la deuda bruta proyectada con una línea roja punteada, mientras que el rango entre los percentiles 40 y 60 (P40-P60) se indica con una sombra roja oscura. Esta sombra muestra un rango de valores en torno a la mediana con un 20% de probabilidad de ocurrir. Del mismo modo luego se muestra con una sombra más clara el rango entre los percentiles 30 y 70 (P30-P70), y así hasta el rango P10-P90. Es decir, el *fanchart* en su totalidad muestra un rango de valores en torno a la mediana con un 80% de probabilidad de ocurrir. Mientras más amplio sea el rango del *fanchart*, mayor es la incertidumbre sobre el valor futuro de la deuda bruta.



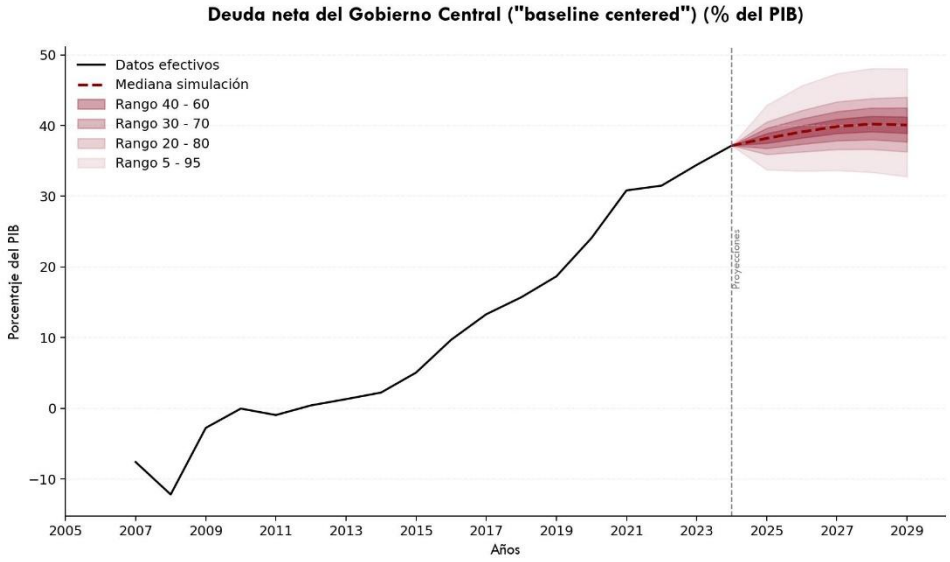

Estos *fancharts*, junto a las distribuciones que representan, serían los resultados principales del modelo que son utilizados por el Consejo para el análisis de la deuda y su sostenibilidad. Los *fancharts* permiten analizar la amplitud de la incertidumbre en torno a la trayectoria del nivel de deuda, además de que permiten obtener medidas de la probabilidad que la deuda supere un nivel

[20] La *skewness* y la *kurtosis* son el tercer y cuarto momento de una distribución de probabilidad, que miden la asimetría de la distribución (en este caso, si hay más trayectorias de deuda bruta sobre o bajo la media de las simulaciones) y el tamaño de las colas de la distribución (en este caso, si hay más o menos simulaciones con valores extremos de deuda bruta, ya sea muy bajos o muy altos), respectivamente.

en particular o se encuentre en un rango en específico. También se puede realizar análisis de estadística comparativa respecto a escenarios alternativos en que la volatilidad de las variables se incremente. Por ejemplo ¿cuánto aumentaría la probabilidad de superar el nivel prudente de deuda si la variación del tipo de cambio nominal aumenta?

Como se ha mencionado más arriba, el modelo VAR para simular las variables económicas y la FRF para simular el balance primario son modelos basados en el comportamiento histórico de estas variables, por lo que las proyecciones de la deuda bruta mostradas en el *fanchart* de más arriba suponen que este comportamiento se mantiene en el futuro, lo que puede no ser cierto si ocurre un cambio estructural, por ejemplo, en la política fiscal. Por esta razón, en el MED también se obtiene un *fanchart* que considera como trayectoria mediana la proyección realizada por el modelo determinístico de la deuda bruta del CFA, el cual se basa el diagnóstico del CFA sobre la trayectoria futura de diversas variables macrofiscales en vez de considerar solamente el comportamiento histórico de las variables. De este modo se usa esta última como estimación base en torno a la que se crea un *fanchart* solapando a ella el rango de las trayectorias de la deuda bruta simuladas por el MED[21]. Más abajo se presenta un gráfico con el resultado obtenido al aplicar este proceso al gráfico anterior.

Ambos tipos de *fancharts* son válidos y se pueden analizar en conjunto para decidir, a juicio experto, cuál describe mejor la situación actual y las posibles trayectorias futuras de las variables fiscales. Si los datos históricos son un buen reflejo de la situación actual, el *fanchart* base –o no modificado- podría representar bien el comportamiento futuro de las variables. Sin embargo, si se considera que existen cambios estructurales o situaciones relevantes que la muestra usada para modelar las variables fiscales no captura, por ejemplo, la versión modificada que considera el criterio experto en la estimación de la trayectoria mediana, puede ser preferible.



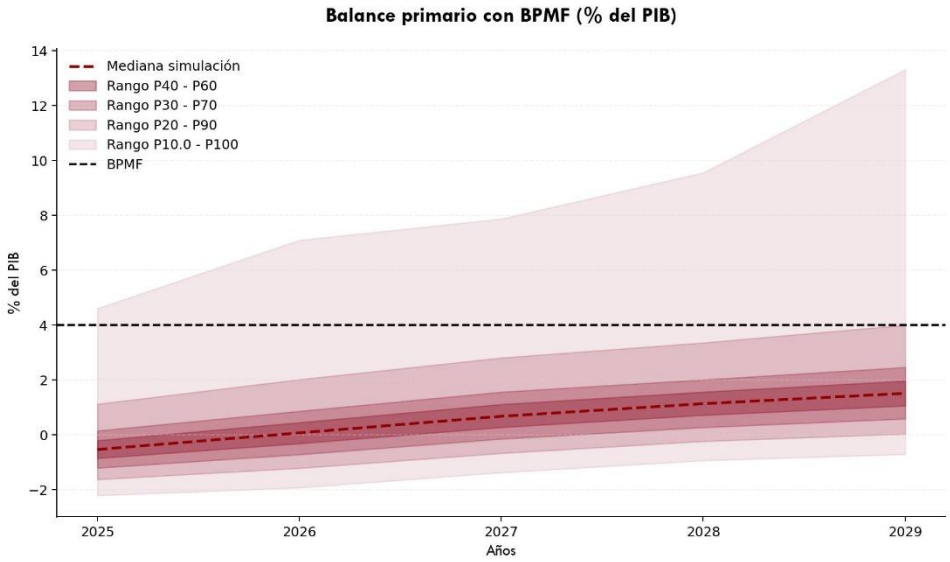

[21] Este proceso es similar al seguido por el FMI en su análisis de sostenibilidad de deuda (IMF, 2022), en donde el primer gráfico sería el equivalente al "*historical fanchart*", mientras que el segundo al "*baseline-centered fanchart*".

## 8. Estimar un nivel prudente de deuda a partir del método de BPMF

A partir de las simulaciones realizadas anteriormente se puede estimar un nivel prudente de deuda mediante el método de Balance Primario Máximo Factible o BPMF. En este método se considera que el balance primario del gobierno está limitado a un máximo superávit factible dadas las restricciones políticas de un país que impedirían un ajuste fiscal de mayor envergadura, o porque las medidas fiscales para aumentar los ingresos públicos se vuelven inefectivas. Por tanto, un país estaría restringido en su capacidad de mantener la sostenibilidad de la deuda pública ante todo evento, dado que habría un nivel de deuda sobre el cual, según las simulaciones, la probabilidad de requerir superávits mayores al BPMF (y que no son alcanzables) para estabilizar la deuda se hace muy alto. Tal nivel de deuda bruta sería el nivel prudente de deuda.

En la práctica, para obtener el nivel prudente de deuda se realiza lo siguiente: se modifica el nivel de deuda bruta inicial (en el último año con datos efectivos) en el modelo y se realizan las simulaciones de balance primario con ese nivel de deuda "ficticio". En principio, mientras menor sea esta deuda inicial, menor será el balance primario ya que se hace menos probable el necesitar estabilizar la deuda. Luego se calcula la proporción de veces que el balance primario supera el BPMF en las simulaciones, si ésta proporción es mayor a una proporción prefijada –un riesgo aceptable para el país de veces que se puede superar el BPMF, por ejemplo, 5% o 10%-, se reduce el nivel de deuda bruta inicial para la siguiente iteración, dado que así se reduce el balance primario en las simulaciones. Mientras que, si es menor a la proporción prefijada, se aumenta la deuda inicial. Finalmente, cuando este proceso iterativo converge a que la proporción de veces que el balance primario supera el BPMF es igual a la proporción prefijada, el nivel de deuda bruta inicial que se ocupó para obtener ese resultado es considerado el nivel prudente de deuda, dado que es el máximo nivel con el que no se superaría el nivel de riesgo prefijado.

Abajo se presenta un ejemplo de resultado, en que se estableció un BPMF de superávit de 5% al final del periodo y una proporción prefijada o "riesgo" de 10%. Como se puede notar, al final del horizonte de proyección, un 90% de las simulaciones de balance primario se encuentra debajo del BPMF.



# II. Implementación del modelo estocástico de la deuda bruta

En esta sección se proporciona una guía operacional sobre cómo usar la planilla Excel con la base de datos del modelo, además de describir las fuentes y supuestos de las variables en ella, y cómo modificar y ejecutar el código Python para obtener los resultados del modelo.

El modelo se conforma de dos archivos, los cuales deben ser editados por el usuario:

1) **Archivo Excel "base_datos"**: Este archivo contiene la base de datos con todas las variables macrofiscales trimestrales y anuales utilizadas en el modelo. La planilla Excel contiene cinco hojas:
   - "trimestral": contiene la base de datos trimestrales para la estimación del modelo VAR.
   - "anual": contiene la base de datos anuales para la estimación de la FRF y la ecuación de la dinámica de la deuda.
   - "Fuentes": contiene los nombres de las variables en las hojas "trimestral" y "anual", así como las etiquetas usadas para éstas, sus fuentes y descripción.
   - "Bonos soberanos": contiene un panel de datos con los bonos del GC al final de cada año desde 2010 en adelante para estimar la duración de la deuda en pesos chilenos, UF y moneda extranjera.
   - "Duración deuda": contiene los cálculos para obtener la duración de los bonos usadas como parámetros del modelo.
   - "Deuda modelo determinístico": Contiene las series de la deuda bruta y neta estimadas con el modelo determinístico del CFA.
2) **Código Python "modelo_MED"**: Este código estima el MED a partir de las variables en la base de datos "base_datos" y parámetros imputados en el mismo código. A partir de estos insumos, el código prepara las variables necesarias para su utilización, estima el modelo VAR, estima la FRF, simula los shocks macroeconómicos y fiscales, estima las trayectorias posibles de las variables macrofiscales, calcula ecuación de la dinámica de la deuda, y presenta los resultados del modelo.

## Insumos para el modelo: variables y parámetros

### Variables

El primer paso para usar esta herramienta es obtener las series de datos efectivos de las variables usadas en el modelo, así como calcular o asignar valores a los parámetros. Las estimaciones con datos trimestrales utilizan datos desde el cuarto trimestre de 2001, sin embargo, la base de datos empieza en el primer trimestre de 1996 para todas las variables excepto para las tasas de interés, por si el usuario quisiera utilizar otra serie más larga de tasa de interés. En el caso de la base anual, ésta inicia en 1980, y las estimaciones utilizan datos desde el mismo año para la brecha del PIB y desde 1989 para el resto de las variables.

El usuario al momento de operar esta herramienta debe verificar que ambas bases se encuentren actualizadas hasta el último trimestre y año disponible, respectivamente[22,23]. La fuente de información de cada variable se encuentra en la hoja "Fuentes", donde aparece la institución que calcula la variable, la descripción de la variable, así como un enlace a la página web en que se publica[24]. El MED utiliza solamente datos públicos provenientes del Banco Central de Chile (BCCh), la Dirección de Presupuestos (Dipres) y el *Federal Reserve Economic Data of the Federal Reserve Bank of St. Louis* (FRED). Los cuadros a continuación resumen la información de las bases de datos.

**Cuadro 2.** Variables trimestrales

| Variable | Etiqueta | Fuente | Descripción |
|---|---|---|---|
| PIB real de Chile | gdpr_cl | BCCh | PIB a volumen a precio del año anterior encadenado, desestacionalizado. |
| Deflactor del PIB | def_chile | BCCh | Deflactor del PIB, trimestral, desestacionalizado. |
| Índice de precios al consumidor | Ipc_cl | BCCh | Índice IPC general al último mes del trimestre. |
| Tipo de cambio | tc_clp_usd | BCCh | Tipo de cambio nominal clp/usd. |
| Tasa de interés real en moneda local | btu10 | BCCh | Tasa de interés del mercado secundario de bonos (BTU, BCU) en UF a 10 años |
| EMBI | embi | BCCh | EMBI spread de Chile |
| Tasa de interés real de EE.UU. | treasury_r10 | FRED | Tasas de interés del mercado secundario de bonos del Tesoro norteamericano a 10 años con madurez constante |
| Precio del cobre | copper_nom | BCCh | Precio del cobre refinado BML (usd/lb). |
| Índice de precios al consumidor de EE.UU. | cpi_usa | FRED | Consumer Price Index for All Urban Consumers: All Items in U.S. City Average, desestacionalizado. |

**Cuadro 3.** Variables anuales

| Variable | Etiqueta | Fuente | Descripción |
|---|---|---|---|
| Balance total | bal | Dipres | Balance del Gobierno Central. |
| Balance primario | bp | Dipres | Balance primario del Gobierno Central, esto es, sin considerar gastos por interés. |
| Gasto por intereses | gint | Dipres | Gasto por intereses del Gobierno Central. |
| Deuda bruta | deuda | BCCh | Deuda bruta del Gobierno Central |
| Otros requerimientos de capital | orc | Cálculo propio | Calculado según el manual del modelo determinístico de la deuda bruta del Gobierno Central del CFA. |
| PIB nominal de Chile | gdpn | BCCh | PIB a precios corrientes. |

[22] Usualmente todos los valores oficiales de las variables trimestrales se encuentran disponibles tras dos meses de finalizado el respectivo trimestre, mientras que para las variables anuales esto ocurre al final de mayo. Sin embargo, existen estimaciones preliminares de los datos anuales que permiten realizar estimaciones actualizadas con anterioridad a estas fechas. En el caso de las cifras fiscales, el Informe de Finanzas Públicas de cada trimestre de la Dipres presenta estimaciones y cifras preliminares del año en curso y año anterior dependiendo del trimestre.

[23] Considerando posibles rectificaciones de valores pasados, por ejemplo, del PIB real.

[24] Nótese que el enlace puede estar roto en caso que la institución correspondiente modifique su página web. Sin embargo, las series de tiempo pueden encontrarse a partir de su descripción.

| | | | |
|---|---|---|---|
| PIB real de Chile | gdpr | BCCh | PIB a volumen a precio del año anterior encadenado. |
| Crecimiento del PIB tendencial | g_tend | Cálculo propio | Variación anual del PIB tendencial estimado por el Comité Consultivo del PIB no Minero Tendencial en el año anterior. |
| Precio del cobre | copper_n | BCCh | Precio del cobre refinado BML (usd/lb). |
| Precio de referencia del cobre | copper_ref | Dipres | Precio de referencia del cobre (usd/lb) calculado por el Comité Consultivo de Precio de Referencia del Cobre. |
| Índice de precios al consumidor | ipc_cl | BCCh | Índice IPC general. |
| Tipo de cambio | tcn_a | BCCh | Tipo de cambio nominal clp/usd a fin de año. |
| Activos del FEES | fees | BCCh | Activos en el FEES (MM usd) |
| Activos del FRP | frp | BCCh | Activos en el FRP (MM usd) |
| Otros activos del Tesoro Público | oatp | Cálculo propio | Suma de todos los activos del Tesoro Público menos FEES y FRP (MM usd). |
| Otros activos del Tesoro Público | oatp2 | Cálculo propio | Suma de todos los activos del Tesoro Público menos FEES, FRP y Fondo para la Educación (MM usd). |
| Retiros del FEES | ret_fees | Cálculo propio | Retiro de activos del FEES que no fueron realizados para aportar fondos al FRP. |

En el caso de la variable anual Otros requerimientos de capital, se debe realizar un cálculo a partir de información entregada por la Dipres. Como se señaló más arriba, estos corresponden a transacciones de activos financieros distintos a los del TP y de pasivos financieros diferentes a la deuda bruta, que afectan las necesidades de financiamiento del Gobierno Central. Es decir, son transacciones financieras que afectan la deuda bruta, y por lo tanto se puede obtener por diferencia entre la variación anual de la deuda bruta y los otros factores explicativos de la variación de la deuda, el déficit fiscal y la variación del TP[25]:

$$U_t = B_t - uso_t^{TP} + (D_t - D_{t-1}) - CM_t^{deuda} \tag{18}$$

Donde la variable $uso_t^{TP}$ corresponde a una estimación de la variación de los activos del TP en el año $t$ descontando los cambios por variación del tipo de cambio y por ganancias provenientes de la inversión del FEES y FRP, dado que estos cambios no afectan la deuda bruta, en millones de pesos. Por su parte, $CM_t^{deuda}$ es la corrección por inflación y tipo de cambio de los bonos emitidos por el Gobierno Central en el año $t$[26].Los activos del TP en millones de dólares se pueden encontrar en la base de datos del BCCh, los cuales deben ser transformados a millones de pesos chilenos con el tipo de cambio del 31 de diciembre o última fecha hábil del respectivo año.

### Parámetros

Los parámetros de la proporción de deuda en moneda extranjera y en UF ($\boldsymbol{\theta^f}$ y $\boldsymbol{\theta^{UF}}$) se asumen iguales a la proporción de deuda en moneda extranjera y en UF a diciembre del último año con información disponible. Se supone que estos valores se mantienen constante a lo largo de todo el

[25] De esta manera, se entiende los Otros requerimientos de capital como la parte no explicada de la variación de la deuda bruta.

[26] Para más detalle sobre como el CFA estima estos valores, véase Arend *et al.* (2025).

horizonte de proyección. Para calcular estas proporciones se utiliza la información disponible en el cuadro "Stock de deuda del Gobierno Central por moneda" del "Reporte trimestral deuda del Gobierno Central" de la Dipres. Este cuadro contiene las proporciones requeridas, sin embargo, se recomienda realizar el cálculo a partir de las cifras en millones de dólares para obtener una medida más precisa.

Los datos y cálculos necesarios para estimar los parámetros de la duración de los distintos tipos de deuda ($\boldsymbol{a^p}$, $\boldsymbol{a^{uf}}$, $\boldsymbol{a^f}$) se encuentran en la planilla "base_datos". Se supone que la duración de los distintos tipos de deuda es el promedio anual de la duración de los bonos soberanos al 31 de diciembre denominados en pesos chilenos, UF, y divisas extranjeras, respectivamente, de los últimos 10 años. Por tanto, en este caso se requiere un panel de datos de los bonos soberanos de Chile al 31 de diciembre de cada año, el cual se encuentra en la hoja "Bonos soberanos". Para actualizar esta hoja se debe utilizar la información de los cuadros "Resumen bonos en circulación en el mercado financiero local" y "Resumen bonos en circulación en el mercado financiero internacional" del "Reporte trimestral deuda del Gobierno Central" de la Dipres. Los datos en el panel de datos son los siguientes:

- **Nemo Bolsa:** El "Nemo" o "Nombre de Emisión" de un bono se refiere al nombre específico que se le asigna a una emisión en particular. Sirve para diferenciar esa emisión de otras emisiones de bonos realizadas por la misma entidad emisora.
- **Emisión:** Es la fecha en que el bono se emitió por primera vez.
- **Vencimiento:** Corresponde a la fecha de vencimiento del bono.
- **Monto Colocado:** Se refiere a la cantidad de dinero (valor nominal) que se ha emitido y vendido a los inversionistas. Puede estar expresado en pesos chilenos, UF, dólares estadounidenses o euros.
- **Monto Circulante:** Corresponde al remanente del monto colocado en caso de haber prepago de un bono. Este monto es el que se comercializa en el mercado secundario. En caso de haber prepago de un bono, el monto circulante será menor al monto colocado. Puede estar expresado en pesos chilenos, UF, dólares estadounidenses o euros.
- **Moneda:** Divisa en la que está denominado el bono emitido. Puede ser pesos chilenos, UF, dólares estadounidenses o euros.

Además de esta información, se requiere el valor de la UF, tipo de cambio clp/usd y tipo de cambio clp/eur al 31 de diciembre del año respectivo, los cuales se pueden encontrar en la base de datos del BCCh (para la UF, enlace acá, y para los tipos de cambio, enlace acá).

Una vez ingresados tales datos, en la hoja "Duración deuda" se calcula el promedio de la duración de los últimos 10 años para cada tipo de deuda.

En lo que respecta a las tasas de interés nominal implícita de la deuda en moneda local y en moneda extranjera en el año anterior al inicio de las proyecciones ($\boldsymbol{j_0^l}$ y $\boldsymbol{j_0^f}$), éstas se obtienen a partir del gasto por intereses del GC provenientes de la deuda denominada en moneda local dividido por la deuda denominada en moneda local, y el gasto por intereses del GC provenientes de la deuda denominada en moneda extranjera dividido por la deuda denominada en moneda local, respectivamente. Los gastos por intereses del GC según la denominación de la deuda no se encuentra disponible en alguna fuente pública, por lo que debe ser solicitada a Dipres.

Por último, para estimar la brecha del cobre, se requiere ingresar en el código Python valores para el precio de referencia del cobre del año en curso y del próximo año, en caso de existir. Estos valores son calculados por el Comité consultivo del precio de referencia del cobre y son publicados por la Dipres durante el segundo semestre del año para el precio de referencia del año siguiente.

## Código

La estimación del MED se realiza en un código del lenguaje de programación Python llamado "modelo_MED.py". Para ejecutar el código se puede utilizar una consola interactiva de Python como Spyder[27], la cual se puede descargar acá.

El código se divide en 7 celdas o partes:

1. Preparaciones previas
2. Parámetros del modelo
3. Importación y preparación de base de datos trimestral
4. Estimación VAR
5. Simulación de shocks y variables económicas del modelo VAR
6. Función de reacción fiscal (FRF), simulación de otros requerimientos de capital y activos
7. Proyección de deuda bruta y neta

De éstas, **el usuario del modelo sólo necesita modificar las dos primeras celdas**. Sin embargo, a continuación se describirán las celdas 1 a 3, de modo que sea más fácil para el usuario modificar el código en caso de que así lo quiera. La implementación de las estimaciones del modelo, realizadas en las celdas 4 a 7 en el código no se explica en esta sección, sino que se deja para la sección III junto a la explicación teórica de los métodos utilizados.

### 1. Preparaciones previas

En esta primera celda se descargan e importan las librerías[28] de Python necesarias para ejecutar el código, y se establece la ubicación de bases de datos utilizadas por el modelo.

Primero se verifica si el usuario tiene instalado las librerías de Python necesarias para ejecutar el código. Para esto se importa primero las librerías pre instaladas en Python `subprocess`, `importlib` y `sys` para importar de manera dinámica las librerías, y luego se crea una lista con las librerías a utilizar (líneas 1 a 6 del código mostrado más abajo)[29]. Luego desde la línea 7 a la 17 se crea la función `instalar_e_importar` para instalar las librerías que no están instaladas previamente en el computador del usuario, y en las líneas 19 y 20 se realiza un *loop* en la lista `librerias_requeridas` para ejecutar la función recién creada para cada librería.

Finalmente, entre las líneas 23 a 30 se importan las librerías y se les da nombres más cortos para simplificar el código, por ejemplo, `numpy` será llamado `np`. Por su parte, en las líneas 31 a 39 se importan algunas funciones por separado para utilizar sus nombres directamente en el código.

[27] El código fue escrito utilizando Spyder versión 5.5.1 con Python versión 3.11.

[28] Por simplicidad en el texto se utiliza el término genérico "librerías" para referirse a "módulos", "paquetes" y "librerías". Los módulos son archivos .py que contienen funciones, clases y variables, por ejemplo, `os.py`. Los paquetes son carpetas con uno o más módulos, por ejemplo, `numpy`. Por último, las librerías son conjuntos de módulos y paquetes, por ejemplo, `pandas`.

[29] En este documento no se muestran todas las líneas del código, solamente las que se consideran más necesarias para la explicación de su funcionamiento.

```
1  ## Descargar librerías no existentes en el computador
2  import subprocess
3  import importlib
4  import sys
5  # chequear e instalar paquetes
6  librerias_requeridas=["os", "numpy", "pandas", "scipy", "matplotlib", "statsmodels",
   "warnings", "pickle"]]
7  def instalar_e_importar(libreria):
8    try:
9        importlib.import_module(libreria)
10   except ImportError:
11        print(f"Instalando {libreria}...")
12        try:
13            subprocess.check_call(sys.executable, "-m", "pip", "install", libreria])
14        Except subprocess.CalledProcessError as e:
15            print(f" Error al instalar {librería}: {e}")
16        else:
17            print(f"{librería} instalado correctamente")
18
19 for libreria in librerias_requeridas:
20   instalar_e_importar(nombre_libreria)
21
22 ## Importar librerias
23 import os
24 import warnings
25 import pickle
26 import numpy as np
27 import pandas as pd
28 import matplotlib.pyplot as plt
29 import statsmodels.api as sm
30 import statsmodels as sm2
31 from statsmodels.tsa.api import VAR
32 from statsmodels.formula.api import ols
33 from numpy import transpose
34 from numpy.linalg import inv, slogdet
35 from scipy.stats import skew, kurtosis
36 from scipy.optimize import minimize
37 from matplotlib.colors import to_rgba
38 from openpyxl.styles import PatternFill, Font
39 from openpyxl.utils import get_column_letter
```

En una segunda parte de esta celda se establece la ubicación de las bases de datos a utilizar en el código. Primero se escoge el directorio de trabajo (**línea 2**). Aquí **el usuario debe ingresar** la dirección de la carpeta en que va a trabajar. Luego, **en la línea 5 se ingresa** la dirección del archivo Excel con las bases de datos, relativo al directorio de trabajo. Por ejemplo, en el código de más abajo se encuentra en la carpeta Datos dentro de la carpeta de trabajo. Por último, en la línea 8 se fija el número utilizado para inicializar el generador de números pseudoaleatorios de modo que los resultados sean replicables.

```
1  ## Cambiar directorio de trabajo
2  os.chdir('C:/…/Modelo de deuda estocástico')
3
4  ## Importación bases de datos trimestral y anual
5  file = 'Datos/base_datos.xlsx'
6
7  ## Seed para números aleatorios
8  np.random.seed(111)
```

## 2. Parámetros del modelo

En esta celda principalmente se ingresan los parámetros a utilizar en el modelo. Primero**, en las líneas 1 y 2 el usuario debe ingresar** la fecha final que quiere utilizar para las bases de datos. En general esta fecha será la última fecha disponible en la base de datos y se debe actualizar en caso que se haya actualizado la base de datos. Estos valores se ingresan en el formato "año-mes", siendo el mes 12 para el caso anual y el último mes del trimestre para el caso trimestral.

**En la línea 4 se ingresa** el número de trimestres a proyectar, que es igual a 4 veces los años a estimar. En el caso de una proyección a 5 años, sería 20 trimestres. Luego, en la línea 5 se encuentra el número de replicaciones para la simulación de la trayectoria de la deuda bruta, y por tanto de cada variable, que se realizarán para formar el *fanchart*. Este debe ser un número alto para asegurar una estimación más robusta, y a más replicaciones, mayor precisión de los percentiles del *fanchart***.** Ambos parámetros pueden ser modificados por el usuario

**En la línea 7 y 8 se ingresa** las proporciones de deuda denominada en moneda extranjera y en UF, mientras que **en las líneas 9 a 11** las duraciones de las deudas denominadas en pesos chilenos, UF, y en moneda extranjera. Luego **en las líneas 12 y 13 se ingresan** las tasas de interés efectiva de la deuda en moneda local y en moneda extranjera para el año anterior al inicio de la proyección. Todos estos parámetros deben ser actualizados por el usuario cuando se dispone de nueva información para el último año con datos efectivos. Y **en la línea 15 se ingresa** el precio de referencia del cobre del año en que se está realizando la proyección, mientras que en las **líneas 16 a 20 se ingresan** las proyecciones de inflación de EE.UU. para el año en curso, a 1 año, 2 años, 3 años, y de largo plazo, necesarias para la proyección del precio real del cobre. Fuentes posibles son las estimaciones del último *World Economic Outlook* del FMI o usar como proxy las últimas proyecciones del PCE de la FED.

Finalmente, en caso que el usuario calcule un un nivel prudente de de deuda a partir del método de BPMF, **en la línea 22 se ingresa** el BPMF usado para estimar la deuda prudente, que se fija en 5% del PIB por defecto, pero puede ser modificado por el usuario. Si se reduce el BPMF, el nivel prudente de deuda será mayor, ya que hay una probabilidad mayor de alcanzar o superar el BPMF. Por su parte, **en la línea 23 se ingresa** la proporción de veces que se puede superar el BPMF, lo que se llama riesgo en el código. Por defecto se utiliza un 10% de probabilidad de superar el BPMF, si se reduce, el nivel prudente de deuda será menor, ya que se quiere evitar más la posibilidad de alcanzar el BPMF.

```
1  trim_final = '2025-03' # Último mes de último trimestre usado en cálculos trimestrales.
2  y_final    = '2024-12' # Último mes de último año usado en cálculos anuales.
3
4  n_h = 20               # Trimestres a proyectar (4*años a estimar).
5  n_b = 20000            # Número de simulaciones (replicaciones).
6
7  prop = 0.362           # Proporción de deuda en moneda extranjera (a fin de último año
                            disponible).
8  prop_uf = 0.296        # Proporción de deuda en UF (a fin de último año disponible).
9  dur_p   = 9.9          # Duración promedio de los bonos en pesos chilenos últimos 10 años.
10 dur_uf  = 12.0         # Duración promedio de los bonos en UF últimos 10 años.
11 dur_f   = 12.7         # Duración promedio de los bonos en moneda extranjera últimos 10
                            años.
12 j_d_0   = 0.0281       # Tasa de interés efectiva de deuda en moneda local al inicio de la
                            proyección
13 j_e_0   = 0.0261       # Tasa de interés efectiva de deuda en moneda extranjera al inicio
```

```
                                de la proyección.
14
15 p_ref_t    = 4.09      # Precio de referencia del cobre del año en curso.
16 infl_usa0  = 0.023     # Proyección de inflación de EE.UU para el año en curso.
17 infl_usa1  = 0.021     # Proyección de inflación de EE.UU para el año siguiente.
18 infl_usa2  = 0.020     # Proyección de inflación de EE.UU para dos años más.
19 infl_usa3  = 0.020     # Proyección de inflación de EE.UU para tres años más.
20 infl_usaLR = 0.020     # Proyección de inflación de EE.UU para tres años más.
21
22 bpmf   = 0.04          # Balance Primario Máximo Factible.
23 riesgo = 0.1           # Proporción máxima de veces que se puede superar el bpmf.
```

En esta celda **también se ingresan los valores de largo plazo para las variables del VAR(1)** realizado en la celda 4. El VAR se realiza con datos trimestrales, por lo que los supuestos que ingrese el usuario deben estar en variación trimestral en caso de que el supuesto sea sobre la variación de la variable, que es el caso del crecimiento tendencial del PIB, el deflactor del PIB, la depreciación del TCN y la inflación según IPC. En el cuadro de abajo se ingresan valores anuales que son transformados a trimestrales con la fórmula $(x+1)^{1/4}-1$, donde $x$ es la variación anual.

```
1 # Valores de largo plazo (LP) para las variables en el VAR
2 g_ss   = ((0.02+1)**(1/4)-1)*100  # Crecimiento tendencial del PIB
3 def_ss = ((0.03+1)**(1/4)-1)*100  # Deflactor del PIB en el LP
4 e_ss   = ((0.01+1)**(1/4)-1)*100  # Depreciación del TCN trimestral en el LP
5 c_ss   = 4.09                     # Precio del cobre en el LP
6 i_ss   = 5.5 - 3.0                # Tasa de interés local real en el LP
7 iu_ss  = 3.5 - 2.0 + 1.0          # Tasa de interés extranjera real en el LP
8 inf_ss = ((0.03+1)**(1/4)-1)*100  # Inflación trimestral según IPC en el LP
```

El modelo permite tres parámetros opcionales que se ingresan al final de esta parte. Primero, se puede añadir directamente una estimación para el balance primario del año en curso, en vez de ser estimado por la FRF más adelante, lo que es útil cuando se tiene información de que el balance primario se desviará de manera relevante de lo esperado según los datos históricos. Para usar esta opción, se debe **ingresar en la <u>línea 2</u>** el valor 1, mientras que si se quiere utilizar el valor proveniente de la FRF, se debe ingresar el valor 0. En caso de escoger el valor 1 en la línea 2, **se debe ingresar en la <u>línea 3</u>** el valor para el balance primario esperado para el año en curso.

Por otro lado, en caso de que el Comité de expertos del precio de referencia del cobre del año en curso ya haya publicado su estimación para el año siguiente, en la **<u>línea 6</u> se debe ingresar** el valor 1, de lo contrario el valor 0; mientras que **en la <u>línea 7</u> se ingresa** el precio de referencia para el año siguiente en caso de que exista.

Finalmente, también **se debe ingresar en la <u>línea 10</u>** el valor 1 si se desea estimar el modelo VAR en la celda siguiente, y 2 si se prefiere utilizar los resultados guardados del archivo que se entrega en la <u>línea 11</u> (en este mismo archivo se guardan los resultados en caso de escoger estimar el modelo VAR). Esta opción es útil para reducir el tiempo de ejecución del código si ya se estimó el modelo VAR durante el último trimestre.

Por último, en las <u>líneas 13 a 16</u> se puede cambiar los percentiles usados en los gráficos de tipo *fanchart*. Sólo se solicita los valores para los percentiles bajo 50, ya que los sobre 50 se definen simétricamente a estos en su distancia a la mediana.

```
1  # Opción de añadir directamente estimación de balance primario para el año en curso.
2  usar_bp_0 = 1   # 1 para usar pb_0, 0 para no usarlo
3  bp_0 = -0.007
```

```
4
5  # Opción de añadir Precio de referencia del cobre del próximo año (de haber).
6  usar_pr_1 = 1   # 1 para usar p_ref_1, 0 para no usarlo
7  p_ref_1 = 4.09  # Precio de referencia a usar si usar_pr_1 = 1
8
9  # Parámetro condicional (1: estimar VAR, 2: ocupar resultados guardados):
10 optimizar = 2
11 archivo_resultado = ‘result_var.pkl’
12  # Percentiles para gráficos de tipo fanchart
13 p1 = 5
14 p2 = 20
15 p3 = 30
16 p4 = 40
```

### 3. Importación y preparación de base de datos

En esta parte se prepara la base de datos trimestral `data_trim` para la estimación del VAR y anual `data_anual` para la estimación del modelo FRF más adelante. Primero, en las líneas 2 y 3 se descarga por separado las bases de datos trimestral y anual en los objetos `data_trim` y `data_anual`, respectivamente. Ambas bases de datos se descargan como objetos `DataFrame` de la librería `pandas`. Por su parte, en la línea 4 se descarga la serie de proyecciones de la deuda bruta del modelo determinístico.

Luego, respecto a la base de datos trimestral, en las líneas 8 a 15 se añade a la base de datos las mismas variables, pero en variación porcentual trimestral. En esta parte se renombran las variables, siendo `g_real` el crecimiento del PIB real, `g_real_usa` el crecimiento del PIB real de Estados Unidos, `inf_cl` la inflación según IPC de Chile, `dep_tcn` la depreciación del tipo de cambio nominal, y `inf_usa` la inflación de Estados Unidos. Luego, en la línea 18 a 21 se crean la variable `i_usa10_mas_EMBI`, que es la variable utilizada para la tasa de interés real de la deuda denominada en moneda extranjera, y el precio real del cobre `copper_r`, usando la inflación de Estados Unidos como deflactor.

```
1  ## Importación bases de datos trimestrales, anuales y de deuda del Modelo determinístico
2  data_trim = pd.read_excel(file, sheet_name='trimestral', header=0, index_col='fecha')
3  data_anual = pd.read_excel(file, sheet_name='anual', header=0, index_col='fecha')
4  deuda_det = pd.read_excel(file,s heet_name='DB modelo deterministico', header=0,
   index_col='fecha')*100
5
6  ### Preparación de base de datos trimestral
7  # Añadir variables en variación trimestral porcentual
8  data2 = data_trim.pct_change(fill_method=None)*100
9  data2 = data2.drop(['btu10', 'treasury_r10'],errors='ignore')
10 data2 = data2.add_suffix('_chg')
11 data2.rename(columns={'gdpr_cl_chg': 'g_real',
12                       'gdpr_usa_chg': 'g_real_usa',
13                       'ipc_cl_chg': 'inf_cl',
14                       'tc_clp_usd_chg': 'dep_tcn',
15                       'cpi_usa_chg': 'inf_usa'},inplace=True)
16
17 # Añadir estimación de tasa de interés real de deuda en moneda extranjera de Chile
18 data_trim['i_usa10_mas_EMBI'] = data_trim['treasury_r10'] + data_trim['embi_cl']/100
19 # Añadir precio real del cobre
20 ipc_usa_base = data_trim.loc['2023-12-31', 'cpi_usa']
21 data_trim['copper_r'] = data_trim['copper_nom']*ipc_usa_base/data_trim['cpi_usa']
22
23 # Unir bases y seleccionar periodo para preparación de base de datos
24 data_trim = pd.concat([data_trim,data2], axis=1)['2003-03':trim_final]
```

En esta sección también se prepara la base de datos anual `data_anual` para la estimación de la FRF y la dinámica de la deuda más adelante. En las líneas 2 a 17 se crean las variables crecimiento real del PIB (`g`), la inflación según IPC (`inf_ipc`), la variación absoluta del precio de cobre nominal (`chg_c_n`), la variación absoluta del precio de referencia del cobre (`chg_p_ref`), además del balance primario (`bp_pib`), el balance total (`b_pib`), los gastos por intereses (`gi_pib`), los otros requerimientos de capital (`orc_pib`) y deuda bruta (`d_p`) como proporción del PIB. Para estimar la FRF también se utiliza el rezago de la deuda bruta como proporción del PIB, y ésta al cuadrado y al cubo, las que se crean en las líneas 20 a 23.

En las líneas 25 y 26 se transforman las variables de los activos del Tesoro Público a proporción del PIB: los activos del FEES (`'fees_p'`), los activos del FRP (`'frp_p'`), los OATP (`'oatp_p'`), los OATP sin considerar los activos del Fondo para la Educación (`'oatp2_p'`), y los retiros del FEES (`'ret_fees_p'`). Luego, se suman los distintos tipos de activos del Tesoro Público, lo que se restan de la deuda bruta para obtener la deuda neta (línea 27).

Por otro lado, también se crean dos variables dummy para estimar la FRF en las líneas 30 y 31. Primero, una dummy de "crisis" (`crisis`) que toma el valor 1 si en el año el crecimiento del PIB real es menor a 0%. Luego, una dummy que toma el valor 1 desde la creación de la regla fiscal (2001) en adelante (`regla_fiscal`). Además, en la línea 34 se crea una variable para la brecha del precio del cobre respecto a su precio referencial (`brecha_cobre`) para los años en que existe la regla fiscal.

```
1  # Variables básicas
2  data_anual['g'] = data_anual['gdpr'].pct_change(fill_method=None) # Crecimiento real
3  data_anual['inf_ipc'] = data_anual['ipc'].pct_change(fill_method=None)*100 # Inflación IPC
4  data_anual['chg_c_n'] = data_anual['copper_n'].diff() # Var. precio cobre nominal
5  data_anual['chg_p_ref'] = data_anual['copper_ref'].diff() # Var. precio de referencia
6
7  # Cálculo de razones básicas sobre PIB
8  gdpn_m = data_anual['gdpn'] *1000
9  for var in ['bp', 'bal', 'gint', 'orc', 'deuda']:
10     data_anual[f'{var}_pib'] = data_anual[var]/gdpn_m
11
12 data_anual.rename(columns = {'bp': 'bp_pib',        # Balance primario (% del PIB)
13                              'bal_pib': 'b_pib',    # Balance total (% del PIB)
14                              'gint_pib': 'gi_pib',  # Gastos por intereses (% del PIB)
15                              'orc_pib': 'orc_pib',  # ORC (% del PIB)
16                              'deuda_pib': 'd_pib',  # Deuda (% del PIB)
17                   inplace = True)
18
19 # Rezagos y potencias de la deuda bruta
20 data_anual['d_p_lag']=data_anual['d_p'].shift()        # Rezago de la deuda (% del PIB)
21 data_anual['d_p_lag_squared']=data_anual['d_p_lag']**2 # Rezago de la deuda al cuadrado
22 data_anual['d_p_lag_cubed']=data_anual['d_p_lag']**3   # Rezago de la deuda al cubo
23
24 # Fondos del Tesoro Público como porcentaje del PIB
25 for fondo in [' fees', ' frp', ' oatp', ' oatp2', ' ret_fees']:
26 data_anual[f'{fondo}_pib'] = data_anual[fondo]*data_anual['tcn_a']/ gdpn_m
27 data_anual['deuda_neta'] = data_anual['d_p'] - data_anual['fees_p'] + data_anual['frp_p'] +
                             data_anual['oatp_p'])       # Deuda neta (% del PIB)
28
29 # Variables dummy
30 data_anual['crisis'] = (data_anual['g']<0).astype(int) # Dummy de crisis
31 data_anual['regla_fiscal'] = (data_anual.index>='2001-12-01').astype(int) # Dummy de regla
   Fiscal
32
33 # Diferencia precio BML y referencial del cobre con Dummy de regla fiscal
34 data_anual['brecha_cobre'] = (data_anual["copper_n"] - data_anual["copper_ref"]).fillna(0)
```

Para la estimación de la FRF también se tiene que calcular la brecha del PIB, la cual se estima con un filtro HP sobre la serie del PIB real entre 1980 y el último año con datos efectivos. Para esto se utiliza la función `hpfilter` del paquete `statsmodels` (línea 3), que entrega dos resultados, el PIB tendencial (`gdpr_trend`) y la parte cíclica del producto (`gdpr_cycle`). Con el primero de estos resultados se estima la brecha del PIB real (`gdpr_gap`) en la línea 4, como la razón PIB tendencial respecto a PIB, menos 1. Para considerar efectos no lineales de la brecha del PIB en el balance primario, en la FRF se incluye un término para la brecha del PIB en caso que sea positiva y otro en caso que sea negativa. Para realizar esto, en las líneas 5 a 7 se crea una dummy que toma el valor 1 si la brecha es positiva y 0 si es negativa, la que se multiplica esta por la brecha del PIB.

```
1  # Calcular brecha de producto con filtro HP
2  gap_aux = data_anual.loc['1980-12':y_final, ['gdpr']].copy()
3  gap_aux['gdpr_cycle'], gap_aux['gdpr_trend'] = sm.tsa.filters.hpfilter(gap_aux, lamb=6.25)
4  data_anual['gdpr_gap'] = gap_aux['gdpr_trend']/gap_aux['gdpr'] - 1
5  data_anual['brecha_pos'] = (data_anual['gdpr_gap']>0).astype(int)
6  data_anual['brecha_pos_int'] = data_anual['gdpr_gap']*data_anual['brecha_pos'] # Brecha si
   es positiva
7  data_anual['brecha_neg_int']=data_anual['gdpr_gap']*(1-data_anual['brecha_pos']) # Brecha
   si es negativa
8
9  # Seleccionar periodo de análisis
10 data_anual=data_anual['1990-12':y_final]
```

En las celdas 1 a 3 descritas se preparan los datos y se ingresan los parámetros a utilizar en el MED. Desde la celda 4 en adelante se realizan las estimaciones para obtener una proyección estocástica de la deuda bruta del GC, por lo que no necesitan ser modificadas por el usuario a menos que quiera modificar el modelo. Dado que no es necesario entender tales secciones para operar el MED, no se describen en esta sección del documento, sino que se describen en la sección III junto a la explicación metodológica del modelo con el fin de entender cómo ésta se operacionaliza en Python.

## Resultados

El código Python guarda los siguientes resultados en la carpeta establecida como directorio de trabajo:

- Imagen de *fanchart* de la deuda bruta del GC según modelo MED.
- Imagen de *fanchart* de la deuda bruta del CG con mediana del modelo determinístico de la deuda bruta del CFA.
- Imagen de *fanchart* de la deuda neta del GC según modelo MED.
- Imagen de *fanchart* de la deuda neta del CG con mediana del modelo determinístico de la deuda bruta del CFA.
- Imagen de *fanchart* del balance primario.
- Imagen de *fanchart* de los gastos por intereses.
- Imagen de *fanchart* del balance fiscal total.
- Imagen de *fanchart* del Balance primario consistente con estimación de BPMF.
- Planilla Excel con tres hojas: 1) Hoja con estadísticos de la deuda bruta, balance primario, gastos por intereses y balance fiscal total; 2) Hoja con deciles de la deuda bruta para cada año del horizonte de proyección según modelo MED; 3) Hoja con deciles de la deuda bruta para cada año del horizonte de proyección según el modelo MED con mediana del modelo determinístico de la deuda bruta del CFA.

Además, de estos resultados, en el software en que se ejecuta el código Python se grafican resultados intermedios del modelo que pueden ser útiles para el análisis de las variables usadas en el modelo:

- Series históricas de las variables utilizadas en el modelo VAR de variables económicas.
- *Fancharts* trimestrales y anuales de simulaciones de las variables económicas.
- Gráfico de residuos en la muestra del modelo VAR de variables económicas.
- Series históricas de las variables utilizadas en la regresión de la FRF.
- Gráficos de análisis de ajuste de la regresión de la FRF.
- Comparación entre la serie efectiva de balance primario y la serie estimada dentro de la muestra con la FRF.
- Comparación entre la serie efectiva de precio de referencia del cobre y la serie estimada dentro de la muestra con la regresión realizada en el modelo.
- *Fanchart* anual de la brecha del precio del cobre respecto a su precio referencial.
- *Fanchart* anual de la brecha del PIB.

# III. Conceptos teóricos de la modelación de la deuda bruta y su aplicación en Python

En esta sección se explica en mayor detalle la metodología del modelo VAR utilizado para modelar las variables económicas (parte 2 del modelo), la FRF usada para modelar el balance primario (parte 4), y la estimación de la ecuación de la dinámica de la deuda (parte 6), así como los códigos usados en las celdas 4 a 7 de la implementación de estas metodologías del modelo en Python.

## Modelación de la economía: VAR

El MED estima en la celda 4 del código Python un modelo VAR de siete variables (las seis variables económicas que afectan la dinámica de la ecuación de la deuda bruta más el precio real del cobre), cuya evolución histórica es graficada al inicio de la celda, con una muestra trimestral desde 2003 en adelante. En el caso de la tasa de interés real en moneda extranjera, se utiliza la suma de la tasa de interés real de EE.UU. (treasury_r10 en el cuadro 2) y del EMBI (embi), de modo de tener una medida que considere el riesgo soberano del país.

Los modelos VAR requieren variables estacionarias, por lo que se realizaron tests de raíz unitaria a cada variable, comprobando que se puede rechazar la hipótesis de raíz unitaria (no estacionariedad) para todas las variables necesarias excepto para el precio real del cobre, por lo que se utilizó la variación trimestral del precio del cobre en el modelo. En el caso de las tasas de interés real en moneda local, según el test Zivot-Andrews, ésta es estacionaria si se considera un quiebre estructural en el primer trimestre de 2021 durante la pandemia de Covid-19, pero no se realiza modificaciones en el VAR dado que se ajusta la volatilidad de ese periodo de la muestra en la estimación (ver más adelante).

En la sección anterior fue explicado en palabras simples qué es un modelo VAR. A continuación se explica más formalmente el modelo VAR utilizado en el MED, partiendo por presentar el modelo VAR estándar en forma matricial, para luego explicar la introducción de restricciones de largo plazo y el método utilizado para reescalar la volatilidad vista en el periodo de la pandemia.

### VAR sin restricciones de largo plazo

Formalmente, una representación matricial de un modelo VAR(1) no estructural para el MED es

$$x_t = \upsilon + \varphi x_{t-1} + \eta_t \tag{19}$$

Donde, $x_t$ es un vector que contiene las variables endógenas $x_{lt}$, con $l = 1, \dots, 7$ en el trimestre $t$; $\upsilon$ un vector que contiene las constantes $\upsilon_l$, con $l = 1, \dots, L$ (en este caso $L = 7$); $\varphi$ es una matriz cuadrada que contiene los coeficientes o parámetros $\varphi_{lm}$, con $l = 1, \dots, 7$ y $m = 1, \dots, 7$; y $\eta_t$ es un vector que contiene los *shocks* ( también llamados innovaciones, perturbaciones o errores) $\eta_{lt}$, con $l = 1, \dots, 7$ del trimestre $t$. Los *shocks* $\eta_{lt}$ son ruido blanco, con media igual a cero, varianza $\sigma_l^2$, con $l = 1, \dots, 7$, respectivamente, autocovarianza igual a cero y una matriz de varianza-covarianzas $\Omega = \mathrm{E}(\eta_t' \eta_t)$; por lo que $\eta_t \sim N_7(0, \Omega)$.

Para mayor comprensión, en el caso del MED el modelo en forma matricial se vería así:

$$\begin{bmatrix} g_t \\ \vdots \\ c_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \upsilon_1 \\ \vdots \\ \upsilon_7 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{17} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{71} & \cdots & \varphi_{77} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} g_{t-1} \\ \vdots \\ \Delta c_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_7 \end{bmatrix}$$

donde $c_t$ es el precio real del cobre.

La estimación de este modelo se realiza mediante el método de Máxima Verosimilitud.[30] Para esto se considera la ecuación (19) escrita en su versión compacta

$$X = AZ + \Theta \tag{20}$$

Donde $X = (x_1, x_2, \dots, x_T)$, que sería una matriz de $7xT$, siendo $T$ el último trimestre observado; $A = (\upsilon, \phi)$, que sería una matriz de coeficientes de $7x8$; $Z = (z_0, z_1, \dots, z_{T-1})$, donde $z_t = \begin{bmatrix} 1 \\ x_t \end{bmatrix}$ para $t = 0, \dots, T-1$, siendo 0 el primer trimestre de la muestra; y $\Theta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_T)$, que sería una matriz de $7xT$.

Como $\eta_t$ se distribuye normal multivariada, tenemos que para todo $t$, su función de densidad, y por tanto también de $x_t$, es

$$f(\eta_t; A, \Omega) = (2\pi)^{-L/2} |\Omega|^{-1/2} exp\left(-\frac{1}{2} \eta_t' \Omega^{-1} \eta_t\right)$$

La función de verosimilitud $\mathcal{L}$, que permite obtener la probabilidad conjunta de observar los datos efectivos dados los valores de los coeficientes $A$ y $\Omega$, para este modelo sería entonces

$$\mathcal{L}(A, \Omega \mid \mathrm{X}) = \prod_{t=1}^{T} f(\eta_t; A, \Omega) = \prod_{t=1}^{T} (2\pi)^{-L/2} |\Omega|^{-1/2} exp\left(-\frac{1}{2}(x_t - Az_{t-1})' \Omega^{-1} (x_t - Az_{t-1})\right)$$

Donde se reemplazó $\eta_t = x_t - Az_{t-1}$. Aplicando logaritmo natural se obtiene

$$\ln \mathcal{L}(A, \Omega \mid \mathrm{X}) = -\frac{TL}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} \ln|\Omega| - \frac{1}{2} \sum_{t-1}^{T} \left((x_t - Az_{t-1})' \Omega^{-1} (x_t - Az_{t-1})\right) \tag{21}$$

Para su implementación en Python, se define $x = vec(X)$, $a = vec(A)$ y $\eta = vec(\Theta)$, con $\eta \sim N(0, I_T \otimes \Omega)$, donde el operador $vec(\cdot)$ transforma una matriz $M$ de tamaño $RxQ$ en un vector de

[30] Véase Lütkepohl (2005) para una explicación más detallada sobre la estimación de modelos VAR.

tamaño $RQx1$ a través de apilar sus columnas y $\otimes$ es el producto de Kronecker. Utilizando las propiedad de estos operadores, se puede transformar el último término de (21) tal que la ecuación resulta en[31]

$$\ln \mathcal{L}(a, \Omega \mid \mathrm{x}) = -\frac{TL}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln|\Omega| - \frac{1}{2}[(x - (Z' \otimes I_L)a)'(I_T \otimes \Omega)^{-1}(x - (Z' \otimes I_L)a)]$$

Para obtener las estimaciones de $A$ y $\Omega$ se puede maximizar esta función, pero como el primer término y la división por dos no son relevantes para una optimización, se puede maximizar la ecuación proporcional

$$\ln \mathcal{L}(a, \Omega \mid \mathrm{x}) \propto -T\ln|\Omega| - [(x - (Z' \otimes I_L)a)'(I_T \otimes \Omega)^{-1}(x - (Z' \otimes I_L)a)] \tag{22}$$

Para la estimación del VAR con restricciones de largo plazo se requiere un *Initial guess* de los parámetros $a$ y $\Omega(\mathrm{a})$ para realizar la optimización mediante Máxima Verosimilitud, por lo que en el código Python se estima primero un VAR sin restricciones, como el recién desarrollado, para utilizar las estimaciones resultantes como *initial guess*. Esto se realiza con el paquete `statsmodels` como se muestra en el código de abajo, en el que se aplica la función `VAR` para crear el modelo y luego `fit` para estimarlo con un rezago y una constante en las ecuaciones (`trend='c'`).

```
### Estimación de VAR sin restricciones como base para la estimación
# Seleccionar variables a utilizar en VAR
data_var = data_trim[['g_real', 'def_chile_chg', 'dep_tcn', 'copper_r', 'btu10',
                      'i_usa10_mas_EMBI', 'inf_cl']].copy()
# Crear modelo VAR
var_model = VAR(data_var)
# Ajustar el modelo
var_model_fitted = var_model.fit(maxlags=1, verbose=True, trend='c')
```

### VAR con restricciones de largo plazo

Considere que las restricciones a los parámetros del modelo VAR se imponen linealmente de la siguiente manera

$$a = R\gamma + r \tag{23}$$

Donde $R$ es una matriz de tamaño $L(L+1)xV = 56x49$ con elementos conocidos y rango $V$[32], $\gamma$ es un vector de tamaño $Vx1$ de parámetros no restringidos y desconocidos a estimar, mientras que $r$ es un vector de tamaño $L(L+1)$. Entonces, se puede reemplazar (23) en (22) para obtener

$$\ln \mathcal{L}(\gamma, \Omega \mid \mathrm{x}) \propto -T\ln|\Omega| - \left[\left(x - (Z' \otimes I_L)(R\gamma + r)\right)'(I_T \otimes \Omega)^{-1}\left(x - (Z' \otimes I_L)(R\gamma + r)\right)\right]$$

Si se define $z = x - (Z' \otimes I_L)r$, la ecuación se puede reescribir como

$$\ln \mathcal{L}(\gamma, \Omega \mid \mathrm{x}) \propto -T\ln|\Omega| - [(z - (Z' \otimes I_L)R\gamma)'(I_T \otimes \Omega)^{-1}(z - (Z' \otimes I_L)R\gamma)] \tag{24}$$

La que se puede maximizar en función de $\gamma$, ya que $\Omega(\gamma)$, de forma similar a la maximización realizada de (22). De los resultados se obtiene una estimación de $a$ a través de (23): $\hat{a} = R\hat{\gamma} + r$, y de $\Omega$ con $\widehat{\Omega} = \frac{1}{T}(X - \hat{A}Z)'(X - \hat{A}Z)$.

Las restricciones impuestas en el MED son los valores de largo plazo o estado estacionario de cada una de las variables. Para obtener las restricciones necesarias para representar esto, se puede

[31] Véase Lütkepohl (2005), capítulo 3, para una explicación más detallada de este paso.
[32] $V$ depende de las restricciones impuestas.

imponer el valor de estado estacionario de cada variable en las ecuaciones de cada variable, por ejemplo, para el caso del crecimiento se tiene la ecuación

$$g_t = \upsilon_1 + \varphi_1 x_{t-1} + \eta_{1t}$$

Donde $\varphi_1$ es la primera fila de la matriz de parámetros $\varphi$ y contiene los coeficientes $\varphi_{1m}$, con $m = 1, \dots, 7$. Entonces imponiendo los valores de estado estacionario, que se representan con el subíndice $ss$, y eliminando el *shock*, se obtiene

$$g_{ss} = \upsilon_1 + \varphi_1 x_{ss}$$

Por lo que despejando $\upsilon_1$, se llega a la restricción para este parámetro

$$\upsilon_1 = -\varphi_1 x_{ss} + g_{ss}$$

El mismo tipo de restricción, *mutatis mutandis*, corresponde para cada variable del modelo. Por lo que sólo es necesario restringir los parámetros de las constantes del modelo VAR para aplicar restricciones de largo plazo, mientras que los parámetros de la matriz $\varphi$ no se restringen.

En el formato de la ecuación (23), estas restricciones se pueden imponer con un vector $\gamma$ de tamaño $V = 49$, en donde las primeras siete filas de (23) es un bloque con las restricciones de estado estacionario, y el siguiente bloque de 49 filas es una matriz diagonal que indica que los parámetros de la matriz $\varphi$ no se restringen (es decir, $a_h = \gamma_h$, con $h = 8, \dots, 56$).

En el código Python, las matriz $R$ se crea de forma explícita imputando cada elemento de la matriz, de forma que se puede ver directamente las restricciones impuestas (líneas 3 a 60). Sin embargo, en el código siguiente se muestra cómo se puede crear esta misma matriz $R$ en menos líneas, por si se desea un código más ordenado. En las líneas 62 a 63 se crea el vector $r$. Nótese que para este bloque del código se ocuparon puntos suspensivos en este documento para reducir su extensión, pero en el código se escriben todos los elementos de la matriz.

```
1 ### Estimación de VAR con restricciones de largo plazo error reescalado
2 ## Creación de restricciones de largo plazo: beta = R*gamma + r
3 R = np.array([
4     [-g_ss, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -def_ss, 0, …, 0, -inf_ss, 0, 0, 0, 0, 0, 0], # parámetro 1
      [g ecuación   : intercepto para g  ]
5     [0, -g_ss, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -def_ss, …, 0, 0, -inf_ss, 0, 0, 0, 0, 0], # parámetro 2
      [def ecuación   : intercepto para def]
6     [0, 0, -g_ss, 0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, -inf_ss, 0, 0, 0, 0], # parámetro 3
      [e ecuación   : intercepto para e  ]
7     [0, 0, 0, -g_ss, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, -inf_ss, 0, 0, 0], # parámetro 4
      [c ecuación   : intercepto para c  ]
8     [0, 0, 0, 0, -g_ss, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0, -inf_ss, 0, 0], # parámetro 5
      [i ecuación   : intercepto para i  ]
9     [0, 0, 0, 0, 0, -g_ss, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -inf_ss, 0], # parámetro 6
      [iu ecuación   : intercepto para iu ]
10    [0, 0, 0, 0, 0, 0, -g_ss, 0, 0, …, -iu_ss, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -inf_ss], # parámetro 7
      [inf ecuación   : intercepto para inf]
11    [1, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 8    [g ecuación   : lag para g  ]
12    [0, 1, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 9    [def ecuación : lag para g  ]
13    [0, 0, 1, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 10   [e ecuación   : lag para g  ]
14    [0, 0, 0, 1, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 11   [c ecuación   : lag para g  ]
15    [0, 0, 0, 0, 1, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 12   [i ecuación   : lag para g  ]
16    [0, 0, 0, 0, 0, 1, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 13   [iu ecuación  : lag para g  ]
17    [0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 14   [inf ecuación : lag para g  ]
18    [0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 15   [g ecuación   : lag para def]
   …
53    [0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 50   [g ecuación   : lag para inf]
```

```
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 51   [def ecuación : lag para inf]
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 1, 0, 0, 0, 0],    # parámetro 52   [e ecuación   : lag para inf]
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 1, 0, 0, 0],    # parámetro 53   [c ecuación   : lag para inf]
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 1, 0, 0],    # parámetro 54   [i ecuación   : lag para inf]
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 1, 0],    # parámetro 55   [iu ecuación  : lag para inf]
    [0, 0, 0, 0, 0, 0, …, 0, 0, 0, 0, 1],    # parámetro 56   [inf ecuación : lag para inf]
    ])

valores_ss = np.array([g_ss, def_ss, e_ss, c_ss, i_ss, iu_ss, inf_ss])
r = np.concatenate([valores_ss, np.zeros(49)]).reshape([56,1])
```

```
R = np.zeros((56,49)) # Crear matriz R
neg_valores_ss = [-g_ss, -def_ss, -e_ss, -c_ss, -i_ss, -iu_ss, -inf_ss]
for i in range(7):  # Crea restricciones de estado estacionario
   for j, val in enumerate(neg_valores_ss):
        R[i, j*7+i] = val
# Rellena el resto de la matriz de los coeficientes de los rezagos sin restricciones
for i in range(7,56):
    R[i, i-7]=1
```

### Ajuste de volatilidad durante la pandemia de Covid-19

Siguiendo a Lenza y Primiceri (2020), se ajusta la varianza de la volatilidad de los *shocks* en torno a la pandemia de Covid-19 de manera explícita, dado que ésta causó una variación sin precedentes en los datos de muchas variables económicas. De estimar el modelo VAR sin considerar el ruido que este evento añade a la base de datos, se corre el riesgo de distorsionar el valor de los parámetros estimados, perdiendo el modelo su utilidad para representar la realidad y realizar proyecciones. El *insight* de Lenza y Primiceri es que dado que se conoce la fecha en que empieza este evento – segundo trimestre de 2020 en el modelo MED-, la corrección se puede realizar mediante un enfoque simple en que se reescalan las observaciones desde el inicio de la pandemia en adelante de manera inversamente proporcional a la varianza de los *shocks* observados. Además, para simplificar el cálculo, asumen que el ajuste es común a todos los *shocks* y decae trimestre a trimestre en la misma proporción.

De este modo, suponga un vector columna $s_t(\theta)$ de tamaño $T$ que reescala la varianza de los *shocks* tal que

$$s_t = \begin{cases} 1 & , \ si\ t < 2°\ trim.2020 \\ \bar{s}_0 & , \ si\ t = 2°\ trim.2020 \\ \bar{s}_1 & , \ si\ t = 3°\ trim.2020 \\ \bar{s}_2 & , \ si\ t = 4°\ trim.2020 \\ 1 + (\bar{s}_2 - 1)\rho^{h-2} & , \ si\ t > 4°\ trim.2020 \end{cases}$$

En donde $h$ son los periodos que han pasado desde el segundo trimestre de 2020. Es decir, antes del segundo trimestre de 2020 no hay ajuste, en el 2°, 3° y 4° trimestre de 2020 se reescala por un factor $\bar{s}_0$, $\bar{s}_1$ y $\bar{s}_2$, respectivamente, para luego decaer el ajuste a una tasa $\rho$. Entonces, el vector a estimar consta de cuatro parámetros: $\theta = [\bar{s}_0,\ \bar{s}_1, \bar{s}_2, \rho\ ]$.

Por tanto, se quiere estimar

$$x_t = \upsilon + \varphi x_{t-1} + s_t \eta_t \tag{25}$$

Que es igual a (19) excepto por el vector de ajuste de la varianza de los shocks. Si $s_t(\theta)$ fuera conocido, entonces bastaría con dividir ("reescalar") ambos lados de la ecuación por $s_t$ para luego

realizar una estimación del modelo VAR del mismo modo señalado en los apartados anteriores pero con la ecuación

$$\tilde{x}_t = \tilde{\upsilon} + \varphi \tilde{x}_{t-1} + \eta_t$$

O

$$\tilde{X} = A\tilde{Z} + \Theta$$

Donde $\tilde{q} = q/s_t$ es la variable reescalada.

Pero si $s_t(\theta)$ es desconocido, hay que estimar $\theta$ en conjunto al resto de los parámetros. Esto se puede realizar también mediante Máxima Verosimilitud. Para esto considérese ahora que para todo $t$, la distribución de densidad de $x_t$ es

$$f(x_t; A, \Omega, \theta) = (2\pi)^{-L/2} |{s_t}^2 \Omega|^{-1/2} exp\left(-\frac{1}{2}\eta_t'({s_t}^2\Omega)^{-1}\eta_t\right)$$

Por lo que la función de verosimilitud $\mathcal{L}$ sería entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A, \Omega, \theta \mid \mathrm{X}) &= \prod_{t=1}^{T} f(x_t; A, \Omega, \theta) \\ &= \prod_{t=1}^{T} (2\pi)^{-\frac{L}{2}} |{s_t}^2\Omega|^{-\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{1}{2}(x_t - Az_{t-1})'({s_t}^2\Omega)^{-1}(x_t - Az_{t-1})\right) \\ &\propto \prod_{t=1}^{T} |{s_t}^2\Omega|^{-\frac{1}{2}} exp\left(-\frac{1}{2}(x_t - Az_{t-1})'({s_t}^2\Omega)^{-1}(x_t - Az_{t-1})\right) \quad (26)\end{aligned}$$

Considerando que $|{s_t}^2\Omega| = {s_t}^{2L}|\Omega|$, entonces

$$\prod_{t=1}^{T} |{s_t}^2\Omega|^{-1/2} = \prod_{t=1}^{T} {s_t}^{-L}|\Omega|^{-1/2} = |\Omega|^{-T/2} \prod_{t=1}^{T} {s_t}^{-L}$$

Aplicando logaritmo natural a (26) se obtiene

$$\ln \mathcal{L}(A, \Omega, \theta \mid \mathrm{X}) \propto -L\sum_{t=1}^{T} \ln s_t - \frac{T}{2}\ln|\Omega| - \frac{1}{2}\sum_{t-1}^{T}\left((x_t - Az_{t-1})'({s_t}^2\Omega)^{-1}(x_t - Az_{t-1})\right)$$

Y realizando la misma transformación del último término que se utilizó para obtener (22) y usando las variables reescaladas, se obtiene

$$\ln \mathcal{L}(A, \Omega, \theta \mid \mathrm{X}) \propto$$
$$-L\sum_{t=1}^{T} \ln s_t - \frac{T}{2}\ln|\Omega| - \frac{1}{2}\sum_{t-1}^{T}\left(\left(\tilde{x} - (\tilde{Z}' \otimes I_L)a\right)'(I_T \otimes \Omega)^{-1}\left(\tilde{x} - (\tilde{Z}' \otimes I_L)a\right)\right) \quad (27)$$

Aplicando las restricciones de largo plazo de la ecuación (23), la función de máxima verosimilitud que se obtiene es

$$\ln \mathcal{L}(\gamma, \Omega, \theta \mid \mathrm{X}) \propto$$
$$-L\sum_{t=1}^{T} \ln s_t - \frac{T}{2}\ln|\Omega| - \frac{1}{2}\sum_{t-1}^{T}\left(\left(\tilde{z} - \left(\tilde{Z}' \otimes I_L\right)R\gamma\right)'(I_T \otimes \Omega)^{-1}\left(\tilde{z} - \left(\tilde{Z}' \otimes I_L\right)R\gamma\right)\right) \qquad (28)$$

Esta función de verosimilitud se maximiza en Python siguiendo el código de más abajo, además de las preparaciones ya mostrada más arriba. Primero se establece la configuración inicial del problema, partiendo por indicar como *initial guess* los resultados del modelo VAR sin restricciones (línea 3). Luego se preparan los datos en el formato adecuado (líneas 4 a 9), creando las matrices $X$, $x$, $Z$, $I_L$ e $I_T$. Luego se crea el vector $\theta$, como un vector, con un *initial guesses* para sus parámetros (línea 12), tales que $\bar{s}_0$, $\bar{s}_1$ y $\bar{s}_2$ son mayores que 1 y descendentes, mientras que $\rho$ debe estar entre 0 y 1.

Los *initial guesses* de $\gamma$ y $\theta$ se unen en la línea 13 para simplificar el código, y en las líneas 14 y 15 se añaden restricciones a estos parámetros al momento de optimizar, en el caso de $\bar{s}_0$, $\bar{s}_1$ y $\bar{s}_2$ se restringe a que sean mayores de cero, mientras que $\rho$ debe estar entre 0 y 1 pero se restringe a que sea menor de 0,7 para asegurar que el efecto del ajuste sea insignificante desde 2024.

En las líneas 19 a 25 se define una función para crear el vector $s_t$ con el nombre `escalar`. Nótese que la variable `s` será el vector que contiene $\bar{s}_0$, $\bar{s}_1$ y $\bar{s}_2$ y se debe entregar al usar la función.

```
1  ## Configuración inicial y preparación datos
2  n_v, TT = data_var.shape[1], len(data_var) # Número de variables en el VAR
3  gamma_0 = var_model_fitted.params.to_numpy()[1:,:].flatten() # Initial Guess de
   coeficientes variables endógenas
4  X = np.array(data_var[1:])    # Variables endógenas
5  x = X.flatten().reshape(-1,1) # vec(Y)
6  Z = np.concatenate((np.ones([TT,1]),data_var), axis=1)[:-1].T # lag de variables endógenas
7  I_L = np.identity(n_v)
8  I_T = np.identity(TT-1)
9  z = x - (np.kron(Z.T, I_L))@r
10
11 # Creamos variable a estimar de volatilidad por pandemia con initial guesses
12 theta = np.array([4.0, 3.0, 2.0, 0.5]) # [s0, s1, s2, rho]
13 initial_guess = np.concatenate([gamma_0,theta])
14 # Agregamos restricciones (bounds) a los parámetros de gamma y theta para optimización
15 eps = 1e-8
16 bounds = [(None, None)]*len(gamma_0) + [(eps, None),(eps, None),(eps, None),(0, 0.7)]
17
18 ## Función para crear vector que escala variables según efecto de la pandemia
19 def crear_escalar(data, s, rho):
20     escalar = np.ones([len(data), 1]) # Creamos variable scalar (s)
21     inicio_covid = data.index.get_loc('2020-06').start # Buscamos cuándo empieza la
                                                            pandemia
22     escalar[inicio_covid:inicio_covid+3] = s  # Modificamos escalar tras inicio de covid
23     distancia = np.arange(len(escalar)) - (inicio_covid + 2) # Efecto decae con el tiempo
24     escalar[inicio_covid+3:] = np.array(1+(s[2,0]-1)*rho**
       np.maximum(distancia[inicio_covid+3:], 0)).reshape(-1,1)
25     return escalar
```

Luego se define la función de máxima verosimilitud a entregar a la función de optimización que se utilizará para maximizar (líneas 2 a 26). Los parámetros a entregar a la función (`params`) son los *initial guesses* de $\gamma$ y $\theta$. Estos se desempaquetan (líneas 3 a 6) para luego utilizar la función `crear_escalar` y ajustar los datos de la base de datos (`data_var`). Después se estiman los errores para obtener la matriz de varianzas-covarianzas (`sigma2`). En el código se utilizan los errores en la función de

verosimilitud en vez de $\tilde{z} - (\tilde{Z}' \otimes I_L)R\gamma$, lo que es equivalente (líneas 18 a 21). Finalmente, en las líneas 25 y 26 se crea la función de verosimilitud y se retorna el valor negativo dado que sólo existe una función para minimizar en la librería `scipy`. En la línea 29 se utiliza la función `minimize`, imputando la función a optimizar, los *initial guesses*, y las restricciones a la optimización.

```
1  ## Función para estimar VAR con restricciones de LP y control por volatilidad de la
      pandemia
2  def negative_ll_restricted_VAR(params):
3      gamma  = params[:len(gamma_0)].reshape(-1,1)
4      theta = params[len(gamma_0):]
5      s = theta[:-1].reshape(-1,1)
6      rho = theta[-1]
7
8      escalar = crear_escalar(data_var, s, rho) # Creamos vector para reescalar shocks de
                                                   pandemia
9      data_var_s = data_var/escalar             # Calculamos variables reescaladas
10
11     ## Estimamos errores
12     # Preparación datos
13     X_s = np.array(data_var_s[1:])    # Variables endógenas
14     x_s = X_s.flatten().reshape(-1,1) # vec(X_s)
15     Z_s = np.concatenate((np.ones([len(data_var_s),1]),data_var_s), axis=1)[:-1].T # lag de
       variables endógenas
16     Z_s_kron = np.kron(Z_s.T, I_L)
17     z_s = x_s - Z_s_kron@r
18     betas = inv(Z_s@Z_s.T)@(Z_s@X_s)  # Estimador MCO
19     # Estimación errores
20     u = z_s - Z_s_kron@(R@gamma)
21     U = X_s - Z_s.T@betas
22     sigma2 = (U.T@U)/(len(data_var)-1) # Varianza-covarianza de los residuos
23
24     # Función LL
25     nll = -n_v*np.sum(np.log(escalar[1:])) - 0.5*len(data_var)*slogdet(sigma2)[1] –
       (u.T@np.kron(I_T, inv(sigma2))@u)[0,0]
26     return -nll  # Retorna el negativo del log-likelihood (para maximizar en vez de
        minimizar)
27
28 ## Realizamos maximización
29 result = minimize(negative_ll_restricted_VAR, initial_guess, method='L-BFGS-B',
           bounds=bounds)
```

Por último, se extraen los parámetros $\hat{\gamma}$ y $\hat{\theta}$ obtenidos de la optimización (líneas 2 a 5) y se calculan los parámetros $\hat{\upsilon}$ y $\hat{\phi}$, con la ecuación (23) (líneas 7 y 8), y $\hat{\Omega}$, con el mismo procedimiento utilizado en la función de optimización. Las líneas 18 a 20 muestran los resultados de la sección utilizados para realizar la simulación de las variables económicas en la sección 6 del código.

```
1  # Extraer los parámetros estimados
2  gamma_tilda    = result.x[:len(gamma_0)]
3  theta          = result.x[len(gamma_0):]
4  s_est, rho_est = theta[:-1].reshape(-1,1), theta[-1]
5
6  ## Extraer coeficientes de VAR necesarios para hacer simulaciones
7  beta_tilda = R@(gamma_tilda.reshape(-1,1)) + r
8  B_tilda    = beta_tilda.reshape([n_v+1,n_v])
9
10 escalar = crear_escalar(data_var, s_est, rho_est) # Escalamiento por efectos de pandemia
11 data_var_s = data_var/escalar # Variables ajustadas por escalar
12
13 X_s = np.array(data_var_s[1:]) # Variables endógenas
14 Z_s = np.concatenate((np.ones([len(data_var_s),1]), data_var_s), axis=1)[:-1] # lag de
   variables endógenas
```

```
15 U = (X_s - Z_s@B_tilda)
16 sigma_tilda = (U.T@U)/(len(data_var)-1)
17
18 cons = B_tilda[0,:]       # Constante de cada ecuación del VAR
19 alphas = B_tilda[1:,:].T  # coeficientes por ecuación del VAR
20 sigma2 = sigma_tilda      # Matriz de covarianzas de errores
```

## Modelación de la reacción fiscal: FRF

El MED estima en la celda 6 del código Python, con una muestra anual desde 1990 en adelante, un modelo ARX(1) del balance primario a partir de la brecha del PIB, la brecha del precio del cobre, el rezago de la deuda bruta, y variables dummies de si la brecha del PIB real es positiva, la existencia de la regla fiscal y si el crecimiento del PIB real es negativo. La evolución histórica de estas variables es graficada al inicio de la celda. Y una revisión previa de las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial del balance primario señalan que la variable exhibe el comportamiento de un AR(1)

Un modelo ARX(1) se refiere a un modelo en que se explica una variable a partir del rezago de esta misma además de otras variables de control. En caso del MED se utiliza el siguiente modelo

$$b_t^p = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t^{gap} F_t^{gap>0} + \alpha_2 Y_t^{gap}\left(1 - F_t^{gap>0}\right) + \alpha_3\left(c_t - c_t^{ref}\right)F_t^{reglaBE} + \alpha_4 d_{t-1} + \alpha_5 d_{t-1}^2 + \alpha_6 d_{t-1}^3 + \alpha_7 ret_t^{FEES} + \alpha_8 F_t^{reglaBE} + \alpha_9 F_t^{crisis} + \mu_t \quad (29)$$

$$\mu_t = \psi\mu_{t-1} + \xi_t \quad (30)$$

$$\xi_t \sim N\left(0, \sqrt{(1-\psi^2)}\sigma_\mu\right) \quad (31)$$

Como se puede notar, el rezago del balance primario se incluye en el error $\mu_t$ de la ecuación (30), de modo que se modela una innovación autocorrelacionada. De esta forma el balance primario depende de las variables contemporáneas y la serie de shocks fiscales con un impacto decreciente. Es decir, si un shock fiscal aumenta el gasto fiscal un año, en el año siguiente seguirá afectando el presupuesto de forma parcial y cada vez menos cada año.

Este modelo se estima en Python con la función `ARIMA` de `statsmodels` (líneas 3 a 8) con la base de datos anual creada en la sección 4. En el parámetro `exog` se incluyen todas las variables de control contemporáneas, mientras que en `order` se escoge `(1,0,0)` para indicar que se estima un AR(1) y en `trend` se indica que se ocupa una constante. Tras la regresión se presentan los resultados (línea 12 a 15), los que señalan que los residuos no exhiben autocorrelación ni heteroscedasticidad y se distribuyen aproximadamente normal.

```
1  ## Regresión
2  data_anual['ret_fees_p'] = data_anual['ret_fees_p'].fillna(0)
3  frf = sm2.tsa.arima.model.ARIMA(data_anual['bp_pib'],
4                                  exog=data_anual[['d_p_lag','d_p_lag_squared','d_p_lag_cubed',
5                                                   'brecha_cobre','regla_fiscal','ret_fees_p',
6                                                   'brecha_pos_int','brecha_neg_int','crisis']],
7                                  order=(1,0,0),
8                                  trend='c').fit(cov_type="robust", method_kwargs={"maxiter":
                                                  500})
9  frf_params = frf.params # Guardamos parámetros obtenidos.
10
11  # Análisis resultados
12 print(frf.summary())
13 fig = frf.plot_diagnostics(fig=fig, lags=10)
```

```
14 plt.tight_layout()
15 plt.show()
```

Finalmente, se realiza la simulación de los shocks fiscales (línea 3 y 4) a partir del parámetro `sigma2` de la regresión anterior que es la estimación de $\sqrt{(1-\psi^2)}\sigma_\mu$. Los *shocks* se guardan en el objeto `tray_anual` que también contiene las simulaciones de las variables económicas anualizadas.

```
1 ## Proyección de shocks fiscales con distribución normal
2 shocks_FRF = np.empty([int(n_h/4), 1, n_b]) # Creamos espacio para almacenar los shocks
3 for j in range(0,n_b):              # Para cada muestra hecha con bootstrapping
4     shocks_FRF[:,0,j] = np.random.normal(0, np.sqrt((1-frf_params['ar.L1']**2)*
                          frf_params['sigma2']), int(n_h/4)) # Guardar muestra.
5 tray_anual = np.concatenate((tray_anual,shocks_FRF), axis=1)
```

## Estimación de la dinámica de la deuda

El MED estima en la celda 7 del código Python la deuda bruta según la ecuación de la dinámica de la deuda bruta, presentada más arriba. Sin embargo, para esto primero se requiere simular algunas variables no simuladas en las partes anteriores.

Por un lado, se debe simular los otros requerimientos de capital como proporción del PIB, $u_t$. Como no se posee información suficiente para modelar esta variable, se simula a partir de la información de sus valores pasados según su media histórica más una innovación autocorrelacionada, de modo que los shocks a esta variable tienen persistencia. Matemáticamente, esto se realiza a través de un AR(1) en la innovación de cada año:

$$u_t = \varsigma + \epsilon_t \tag{32}$$

$$\epsilon_t = \lambda\varepsilon_{t-1} + \zeta_t \tag{33}$$

donde $\varsigma$ es una constante, $\epsilon_t$ es la innovación autocorrelacionada y $\zeta_t$ el shock en el año $t$ a los Otros requerimientos, el que se supone siguen una distribución normal $\zeta_t \sim N\left(0, \sqrt{(1-\lambda^2)}\sigma_\epsilon\right)$.

En Python esto se realiza en la celda 6 según el código de abajo. En la línea 3 se realiza un modelo AR(1) con datos de los otros requerimientos de capital entre 2008 y el último año con información efectiva. Luego en la línea 4 se guardan los parámetros estimados y en la línea 5 se obtiene la desviación estándar de los *shocks* a los otros requerimientos, los que serán ocupados en la distribución normal de los *shocks* a simular. En las líneas 8 a 13 se simulan iterativamente las trayectorias de los otros requerimientos de capital con los parámetros estimados, los otros requerimientos de capital del año anterior y un número aleatorio obtenido de la distribución normal señalada anteriormente.

```
1  ### Otros requerimientos de capital
2  # Modelamos como un AR(1) en los errores
3  orc = sm2.tsa.arima.model.ARIMA(data_anual['orc_pib']['2008':y_final], order=(1,0,0),
   trend='c').fit()
4  orc_params = orc.params # Guardamos parámetros necesarios para simulación
5  orc_shock_sd = np.sqrt((1-orc_params['ar.L1']**2)*orc_params['sigma2']) # desv. est. de
   shock a ORC
6
7  # Simulamos trayectorias de orc para cada simulación
8  sim_orc = np.empty([int(n_h/4),1,n_b])
9  for i in range(0, n_b):
10     sim_orc[0, 0, i] = orc_params['const'] + orc_params['ar.L1']*
                          (data_anual['orc_pib'].iloc[-1] - orc_params['const']) +
```

```
                        np.random.normal(0, orc_shock_sd)
11     for j in range(1, int(n_h/4)):
12             sim_orc[j, 0, i] = orc_params['const'] + orc_params['ar.L1']*(sim_orc[j-1,0,i]
               - orc_params['const']) + np.random.normal(0,orc_shock_sd)
13 tray_anual = np.concatenate((tray_anual,sim_orc), axis=1)
```

En la celda 6 también se realiza la regresión para estimar el movimiento de los OATP. Estos se modelan como un modelo de corrección de errores, en el que los OATP como proporción del PIB tienden al valor promedio de los últimos 10 años de los OATP sin contar el Fondo para la Educación. Matemáticamente:

$$\Delta a_t^{OATP} = \vartheta\left(\overline{a^{OATP2}} - a_{t-1}^{OATP}\right) + \xi_t^{OATP} \tag{34}$$

Donde $\overline{a^{OATP2}}$ es el promedio de los últimos 10 años de los OATP sin contar el Fondo para la Educación y $\xi_t^{OATP}$ un shock de distribución normal a estos activos. En el código estos se modelan con datos desde 2007 en adelante (línea 2) y la regresión se realiza con la función `OLS` del módulo `statsmodels` (líneas 4 y 5). Los resultados se guardan (línea 6) para utilizarlos en la simulación iterativa realizada en la siguiente parte.

```
1 # Modelamos los OATP como un modelo de corrección de errores
2 data_oatp = data_anual.loc['2007-12':y_final, ['oatp_p']] # Base de datos para la estimación
3 data_oatp = data_oatp.assign(oatp_mod = np.mean(data_anual['oatp2_p'][-10:]) -
  data_oatp[['oatp_p']].shift(), chg_oatp=data_oatp[['oatp_p']].diff())
4 oatp = sm2.regression.linear_model.OLS(data_oatp['chg_oatp']['2008-12':y_final],
  data_oatp['oatp_mod']['2008-12':y_final], hasconst=False)
5 oatp_result = oatp.fit()
6 oatp_params = oatp_result.params # Guardamos parámetros necesarios para simulación
7 print(oatp_result.summary())
```

Luego, en la celda 7, se estima la brecha del precio del cobre. Para esto primero se debe simular el precio de referencia del precio del cobre, lo que se realiza a partir de una regresión de la variación del precio de referencia del cobre sobre los cambios efectivos del precio del cobre en los cuatro años anteriores:

$$\Delta c_t^{ref} = w + \Delta c_{t-1} + \Delta c_{t-2} + \Delta c_{t-3} + \Delta c_{t-4} + \varepsilon_c \tag{35}$$

Donde $\Delta$ indica la variación anual absoluta de la variable. Para estimar el precio de referencia se testearon modelos en niveles, variaciones absolutas y variaciones porcentuales, con uno a cinco rezagos; siendo el modelo presentado arriba el que exhibió menor error cuadrático medio. Sin embargo, las bases de datos utilizadas para ejecutar el código Python contienen suficiente información para realizar la estimación con las otras opciones testeadas si se deseara hacerlo. Este modelo solamente es usado como una herramienta simple para obtener proyecciones del precio de referencia del cobre y no representan una opinión del CFA sobre las estimaciones de los miembros del Comité Consultivo del Precio de Referencia del Cobre.

Para realizar esta regresión en el código se crea primero una base de datos nueva conteniendo las variaciones del precio del cobre y su referencial (líneas 3 a 8), a la cual se agrega luego los rezagos del precio del cobre (línea 10 y 11). Con esta base de datos se estima el modelo con mínimos cuadrados ordinarios usando la función `ols` del módulo `statsmodels` (líneas 12 y 13). Finalmente, se guardan los parámetros estimados (línea 15).

```
1  ### Brecha del precio del cobre
2  ## Esimación del precio de referencia con OLS en rezagos de la variación anual de sí mismo
```

```
3  data_copper = data_anual[['chg_c_n','chg_p_ref']].copy()
4  if usar_pr_1 == 0: # Agregamos variación del precio de referencia del año en curso
5      data_copper.loc[pd.Timestamp(f"{data_copper.index[-1].year+1}-12-31")] = [np.nan,
       p_ref_t-data_anual[' copper_ref'].iloc[-1]]
6   else:         # Si ya existe un precio de referencia para el próximo año también agregamos
                   variación del próximo año
7      data_copper.loc[pd.Timestamp(f"{data_copper.index[-1].year+1}-12-31")] = [np.nan,
       p_ref_t-data_anual['copper_ref'].iloc[-1]]
8      data_copper.loc[pd.Timestamp(f"{data_copper.index[-1].year+2}-12-31")] = [np.nan,
       p_ref_1-p_ref_t.iloc[-1]]
9
10 for lag in range(1, 5):   # Creamos 4 rezagos
11     data_copper[f'chg_c_n_l{lag}'] = data_copper['chg_c_n'].shift(lag)
12 p_ref_ols = ols('chg_p_ref ~ chg_c_n_l1 + chg_c_n_l2 + chg_c_n_l3 + chg_c_n_l4',
   data=data_copper)
13 p_ref_ols_result = p_ref_ols.fit()
14 print(p_ref_ols_result.summary())
15 pref_params = p_ref_ols_result.params
```

Luego se simula las trayectorias de la brecha del precio del cobre con un *loop*, en donde para cada simulación se calcula primero el precio del cobre según las trayectorias del precio real del cobre simuladas con el VAR anteriormente y la inflación esperada de EE.UU. (líneas 6 y 9), con lo cual después se puede estimar el precio de referencia. Para el año en curso (`j==0`) se utiliza el precio de referencia calculado por el comité de expertos (`p_ref_t`). Para el año siguiente, el precio de referencia puede ser el precio calculado por el comité de expertos del año en curso (`p_ref_1`), si ya está publicado (`usar_pr_1==1`), o se estima a partir de los parámetros estimados en la regresión anterior (líneas 12 a 18). Lo mismo se realiza para los años siguientes (líneas 19 a 50), para finalmente calcular la brecha del precio del cobre y guardar los resultados en el objeto `tray_anual` junto al resto de insumos para simular la deuda bruta.

```
# Simulación de brecha del precio del cobre
1  sim_cobre = np.empty([int(n_h/4),3,n_b])
2  for i in range(0 ,n_b):
3      for j in range(0, int(n_h/4)):
4          # Calcula precio nominal (0) y de referencia (1)
5          if j == 0:
6              sim_cobre[j, 0, i] = tray_anual[j,3,i]*(1+infl_usa0)
7              sim_cobre[j, 1, i] = p_ref_t
8          elif j == 1:
9              sim_cobre[j, 0, i] = tray_anual[j,3,i]*(1+infl_usa0)*(1+infl_usa1)
10             if usar_pr_1 == 1:
11                 sim_cobre[j, 1, i] = p_ref_1
12             elif usar_pr_1 == 0:
13                 sim_cobre[j, 1, i] = sim_cobre[j-1,1,i] + \
14                     (pref_params['Intercept'] + \
15                      pref_params['chg_c_n_l1']*(sim_cobre[j-1,0,i] -
                        data_anual['copper_n'].iloc[-1]) + \
16                      pref_params['chg_c_n_l2']*data_anual['chg_c_n'].iloc[-1] + \
17                      pref_params['chg_c_n_l3']*data_anual['chg_c_n'].iloc[-2] + \
18                      pref_params['chg_c_n_l4']*data_anual['chg_c_n'].iloc[-3])
19         elif j == 2:
…
43         else:
44              sim_cobre[j, 0, i] = tray_anual[j,3,i]*(1+infl_usa0)*(1+infl_usa1)*
                                     (1+infl_usa2)*(1+infl_usa3)*(1+infl_usaLR)**(j-4)
45             sim_cobre[j, 1, i] = sim_cobre[j-1,1,i] + \
46                 (pref_params['Intercept'] + \
47                  pref_params['chg_c_n_l1']*(sim_cobre[j-1,0,i]-sim_cobre[j-2,0,i]) + \
48                  pref_params['chg_c_n_l2']*(sim_cobre[j-2,0,i]-sim_cobre[j-3,0,i]) + \
49                  pref_params['chg_c_n_l3']*(sim_cobre[j-3,0,i]-sim_cobre[j-4,0,i]) + \
```

```
50                  pref_params['chg_c_n_l4']*(sim_cobre[j-4,0,i]-sim_cobre[j-5,0,i]))
51         # Calcula brecha del precio del cobre
52         sim_cobre[j, 2, i] = sim_cobre[j,0,i] - sim_cobre[j,1,i]
53 tray_anual = np.concatenate((tray_anual, sim_cobre[:,2:3,:]), axis=1)
```

Por otro lado, se debe estimar la brecha del PIB para cada trayectoria simulada. Esto se realiza aplicando un filtro HP desde 1990 al último año simulado a la serie de PIB real, de modo que para cada simulación, el PIB tendencial es distinto ya que depende de la trayectoria simulada. Para implementar esto en Python, primero se estima el PIB real para cada año del horizonte de proyección de cada simulación usando las simulaciones realizadas de crecimiento del PIB real (líneas 3 a 6). Luego se concatena la serie efectiva con la trayectoria futura simulada del PIB (línea 8), para obtener la serie a la que se le aplica el filtro HP usando la función `hpfilter` del módulo `statsmodels` con un parámetro lambda de 6.25, que es el recomendado por la literatura (línea 9). Tras guardar el PIB tendencial que entrega la función (línea 11), la brecha se calcula entonces como el PIB real en nivel dividido el PIB tendencial en nivel, menos 1 (línea 12). Como en la FRF se separa los casos en que la brecha del PIB real es positiva de si es negativa, los resultados se separan en las líneas 13 y 14. Por último, en esta parte del código también se calcula si el año simulado es un año con crisis o no dependiendo si el crecimiento del PIB real es menor o mayor a 0% (líneas 15 y 16).

```
1  ## PIB real, brecha del PIB y crisis
2  sim_pibr = np.empty([int(n_h/4), 6, n_b])
3  for i in range(0, n_b):
4      sim_pibr[0, 0, i] = data_anual['gdpr'].iloc[-1]*(1+tray_anual[j,0,i]/100)
5      for j in range(0, int(n_h/4)):
6              sim_pibr[j, 0, i] = sim_pibr[j-1,0,i]*(1+tray_anual[j,0,i]/100)
7      # Estimamos brecha del PIB con PIB tendencial según filtro HP
8      serie_total = np.concatenate((data_anual['gdpr'].to_numpy(), sim_pibr[:,0,i]), axis=0)
       # Unimos muestra con simulación
9      _, tendencia = sm.tsa.filters.hpfilter(serie_total, lamb=6.25)
10     # Guardamos resultados
11     sim_pibr[:, 1, i] = tendencia[-int(n_h/4):] # La tendencia de los años simulados
12     sim_pibr[:, 2, i] = sim_pibr[:,0,i]/sim_pibr[:,1,i] - 1 # Brecha del PIB
13     sim_pibr[:, 3, i] = np.where(sim_pibr[:,2,i] > 0, sim_pibr[:,2,i], 0) # Brechas si es
       positiva
14     sim_pibr[:, 4, i] = np.where(sim_pibr[:,2,i] <= 0, sim_pibr[:,2,i], 0) # Brechas si es
        negativa
15     for j in range(0, int(n_h/4)):
16         sim_pibr[j, 5, i] = np.where(tray_anual[j,0,i] < 0, 1, 0)  # Año con crisis o no
17 tray_anual = np.concatenate((tray_anual, sim_pibr[:,3:6,:]), axis=1)
```

Por último, se tiene que simular las trayectorias de las tasas de interés nominal implícita de la deuda en moneda local, tanto en UF como pesos chilenos, y en moneda extranjera, $j_t^k$. Esto se realiza a partir de las variables económicas simuladas a través del VAR y los valores iniciales de estas para el último año con cifras efectivas, $j_0^k$, que se ingresan en la parte 2 del código como parámetros del modelo. En el caso de la tasa de interés de la deuda en UF, se utiliza la trayectoria simulada de la tasa de interés real en moneda local, mientras que para la tasa de interés en pesos chilenos se utiliza las trayectorias simuladas de la tasa de interés real en moneda local y de la inflación, y para la tasa de interés de la deuda en moneda extranjera se utiliza las trayectorias de la tasa de interés real de EE.UU. y de la inflación. Nótese que en el modelo las tasas de interés simuladas no dependen del nivel de la deuda bruta, sino que sólo de las variables macroeconómicas modeladas en el modelo VAR, que no considera un *feedback* de la política fiscal sobre las variables macroeconómicas. En este sentido el MED es un modelo de equilibrio parcial.

Tras estos cálculos finales, se puede simular las trayectorias de la deuda bruta, que se realiza en conjunto con la simulación del balance primario, los activos del Tesoro Público y los gastos por intereses, como se muestra en el código de abajo. Para cada simulación `i` se simula primero los activos del Tesoro Público. Los aportes al FRP se estiman según la ley que los regula, por lo que dependen de la simulación del balance fiscal del periodo anterior, mientras que los retiros se fijan en 0,1% del PIB mientras haya recursos en el fondo (líneas 11 a 13). En el caso del FEES, los aportes también siguen la ley, excepto que se indica que los activos no superen el 7% del PIB[33], en caso de superar dicho umbral con el aporte estimado, se aporta hasta alcanzar el 7% (líneas 17 a 23). Para los retiros del FEES, se supone que se realizan después del aporte, sólo si hay una crisis económica y la brecha del PIB es menor o igual a -3,0%, y el monto retirado es 2 veces el crecimiento del PIB real del año (líneas 26 a 30). Por último, los OATP se simulan según la ecuación (34) con un shock aleatorio (líneas 33 a 35).

```
1  ### Simulación de trayectorias de balance primario, deuda, activos y gastos por intereses
2  sim_bp_d = np.empty([int(n_h/4), 4, n_b]) # Para guardar resultados deuda, balance primario
                                                e intereses
3  sim_act = np.empty([int(n_h/4), 10, n_b]) # Para guardar resultados activos
4
5  for i in range(0, n_b):
6      for j in range(0, int(n_h/4)):
7          if j == 0:
8              ## Simular activos
9
10             ## FRP
11             sim_act[j, 0, i] = max(0, min(data_anual['b_pib'].iloc[-1], 0.005)) # Aporte
12             sim_act[j, 1, i] = 0.001 if data_anual['frp_p'].iloc[-1] > 0.001 else
                                  data_anual['frp_p'].iloc[-1]                    # Retiro
13             sim_act[j, 2, i] = data_anual['frp_p'].iloc[-1] + sim_act[j,0,i] –
                                  sim_act[j,1,i]                              # Saldo final
14
15             ## FEES
16             # Aporte
17             if data_anual['b_pib'].iloc[-1] >
                  max(0, min(data_anual['b_pib'].iloc[-1], 0.005)):
18                 sim_act[j, 3, i] = data_anual['b_pib'].iloc[-1] -
                                       max(0, min(data_anual['b_pib'].iloc[-1], 0.005)) \
19                 if data_anual['fees_p'].iloc[-1] + data_anual['b_pib'].iloc[-1]-
                      max(0, min(data_anual['b_pib'].iloc[-1], 0.005)) < 0.07 \
20                 else 0.07 - data_anual['fees_p'].iloc[-1]
21             else:
22                 sim_act[j, 3, i] = 0
23             sim_act[j, 4, i] = data_anual['fees_p'].iloc[-1] + sim_act[j,3,i] # Saldo final
                                  antes de retiros
24
25             # Retiro
26             if tray_anual[j, 12, i] == 1 and trasim_pibr[j,2,i] <= -0.03:
27                 sim_act[j, 5, i] = 2*tray_anual[j,0,i] if  sim_act[j,4,i] >=
                                     -2*tray_anual[j,0,i] else -sim_act[j,4,i]
28             else:
29                 sim_act[j, 5, i] = 0
30             sim_act[j, 6, i] = sim_act[j,4,i] + sim_act[j,5,i]   # Saldo final
31
32             ## OATP
33             sim_act[j, 7, i] = data_anual['oatp_p'].iloc[-1] + oatp_params['oatp_mod']*
                                  (np.mean(data_anual['oatp2_p'][-10:]) -
                                  data_anual['oatp_p'].iloc[-1]) +\
34                                sim_shock_oatp[j,0,i]
```

[33] Este es el límite superior de la estimación de los activos óptimos en el FEES realizada por FMI (2023).

```
35            sim_act[j, 7, i] = sim_act[j,7,i] if sim_act[j,7,i] > 0 else 0
36
37            # Total activos
38            sim_act[j, 8, i] = sim_act[j,2,i] + sim_act[j,6,i] + sim_act[j,7,i]
```

Por su parte, el balance primario. Para el primer año de simulación (`j==0`), el código evalúa si se fijó que el balance primario se calculará a partir de la FRF, en cuyo caso se reemplazan los parámetros estimados y los valores simulados de las variables macrofiscales y el shock fiscal en la FRF (líneas 36 a 43), o se utiliza el balance primario imputado en la parte 2 del código, al cual además se le añade el shock fiscal simulado pero reducido en tamaño proporcionalmente según los trimestres que le restan al año, lo que se calcula según la fecha del último dato de la base de datos (líneas 44 a 45). Finalmente, en la línea 46 se guarda la innovación $\mu_t$ de la ecuación FRF para ser utilizada en el siguiente periodo a simular.

Con el balance primario se puede estimar la deuda bruta para el año, reemplazando los parámetros imputados en la parte 2 del código y las variables macrofiscales simuladas para el año (líneas 49 a 55), y el gasto por intereses como proporción del PIB ($gi_t$) que se calcula en las líneas 58 a 60 con la siguiente ecuación

$$gi_t = \frac{\theta^F j_t^f (1+\varepsilon_t) + \theta^{UF} j_t^{uf} (1+\pi_t) + (1-\theta^F-\theta^{UF}) j_t^p}{(1+g_t)(1+\rho_t)} d_{t-1}$$

Para los años siguientes se realiza el mismo proceso iterativo, pero sin considerar la opción de imputar directamente el valor del balance primario (líneas 62 a 118).

```
…
4  for i in range(0, n_b):
5      for j in range(0, int(n_h/4)):
6          if j == 0:
…
34             ### Simular balance primario
35             if usar_bp_0 == 0:
36                 sim_bp_d[j, 0, i] = frf_params['const'] +
                                       frf_params['ret_fees_p']*sim_act[j,5,i] +\
37                                     frf_params[['d_p_lag','d_p_lag_squared','d_p_lag_cubed']]@
                                       [data_anual['d_p'].iloc[-1], data_anual['d_p'].iloc[-1]**2,
                                       data_anual['d_p'].iloc[-1]**3] +\
38                                     frf_params['brecha_cobre']*tray_anual[j,9,i] +\
39                                     frf_params['brecha_pos_int']*tray_anual[j,10,i] +\
40                                     frf_params['brecha_neg_int']*tray_anual[j,11,i] +\
41                                     frf_params['regla_fiscal'] +\
42                                     frf_params['crisis']*tray_anual[j,12,i] +\
43                                     frf_params['ar.L1']*frf.resid.iloc[-1]+tray_anual[j,7,i]
44             elif usar_bp_0 == 1:
45                 sim_bp_d[j, 0, i] = bp_0 + (frf_params['ar.L1']*frf.resid.iloc[-1] +
                   tray_anual[j,7,i])*(1-data_trim.tail().index[0].month/12)
46             mu = frf_params['ar.L1']*frf.resid.iloc[-1] + tray_anual[j,7,i]
47
48             ### Simular deuda
49             sim_bp_d[j, 1, i] = ((prop*(1+tray_anual[j,15,i]/100)*(1+tray_anual[j,2,i]/100)
                                       +\
50                                 prop_uf*(1+tray_anual[j,14,i]/100)*(1+tray_anual[j,6,i]/100) +\
51                                 (1-prop-prop_uf)*(1+tray_anual[j,13,i]/100))/ \
52                                 ((1+tray_anual[j,0,i]/100)*(1+tray_anual[j,1,i]/100)))* \
53                                 data_anual['d_p'].iloc[-1] -\
54                                 sim_bp_d[j,0,i] + tray_anual[j,8,i] +\
55                                 (sim_act[j,8,i]-(data_anual['fees_p'].iloc[-1] -
                                   data_anual['frp_p'].iloc[-1]-data_anual['oatp_p'].iloc[-1])/
```

```
                                ((1+tray_anual[j,0,i]/100)*(1+tray_anual[j,1,i]/100)))
56
57              ### Simular gastos por intereses
58              sim_bp_d[j, 2, i] = ((prop*tray_anual[j,15,i]/100*(1+tray_anual[j,2,i]/100) +
                                     prop_uf*tray_anual[j,14,i]/100*(1+tray_anual[j,6,i]/100) +
                                (1-prop-prop_uf)*tray_anual[j,13,i]/100)/ \
59                              ((1+tray_anual[j,0,i]/100)*(1+tray_anual[j,1,i]/100)))* \
60                              data_anual['d_p'].iloc[-1]
61          else:
62              ## Simular activos
…
95              # Simular balance primario
…
106             # Simular deuda
…
115             # Gastos por intereses
…
119         # Balance total
120         sim_bp_d[j,3,i] = sim_bp_d[j,0,i] - sim_bp_d[j,2,i]
```

## Estimación de nivel prudente de la deuda bruta según BPMF[34]

La estimación del nivel prudente de la deuda bruta mediante el método de BPMF se realiza de forma iterativa, escogiendo un valor de deuda inicial respecto al PIB ($d_0$), con el que se simula el modelo, incluyendo el balance primario. Luego, se calcula la proporción de simulaciones en que el balance primario supera el BPMF. Si esta proporción supera un nivel prefijado, que se llamará $R$ (de riesgo), entonces se reduce $d_0$, y en el caso opuesto, se aumenta $d_0$. Entonces, se simula nuevamente el balance primario y se calcula las veces que se supera el BPMF. Y así, hasta converger al $riesgo$.

Este cálculo se puede implementar usando un algoritmo de iteración para números discretos basado en el método de Newton-Raphson. Para esto, considere el riesgo $R$, y un *initial guess* $d_0$ del nivel de deuda bruta que logra que el riesgo sea $R$, mientras que $s_BPMF$ es las proporción de veces que se supera el BPMF al final del horizonte de estimación con el nivel de deuda inicial usado. Cuando $s_BPMF = R$, se obtiene el nivel de deuda prudente $d^*$.

Considere el error entre $d^*$ y $d_0$: $h = d^* - d_0$. Entonces se sabe que $R = s_BPMF(d_0 + h)$, lo que es aproximadamente

$$R = s_BPMF(d_0 + h) \approx s_BPMF(d_0) + h * s_BPMF'(d_0)$$

Donde $s_BPMF'$ es la derivada de $s_BPMF$. Entonces,

$$h \approx \frac{R - s_BPMF(d_0)}{s_BPMF'(d_0)}$$

Lo que quiere decir que distancia entre el *initial guess* y la deuda prudente sería aproximadamente la diferencia entre la proporción de veces que se supera el BMF con el *initial guess* y el riesgo objetivo, dividido por la variación de la proporción de veces que se supera el BMF al variar el *initial guess*.

Por tanto, tras el cálculo con $d_0$, este initial guess $d^*$ se actualiza a

[34] Esta parte no se encuentra en el código que acompaña al documento. Sin embargo, se incluye en caso de que el lector quiera implementar una estimación del nivel prudente de deuda a partir del BPMF.

$$d_1 = d_0 + h \approx d_0 + \frac{R - s_BPMF(d_0)}{s_BPMF'(d_0)} \approx d_0 + \frac{R - s_BPMF(d_0)}{\frac{\Delta s_BPMF}{\Delta d_0}}$$

Donde se aproxima la derivada de $s_BPMF$ en $d_0$ como la variación de $s_BPMF$ al usar los dos últimos *guesses*. Para inicializar el cálculo no se utiliza esta fórmula sino que se usa $d_1 = \frac{d_0}{2}$, ya que no se tienen dos *guesses*. Y de este modo se itera hasta obtener $s_BPMF = R$.

## Referencias

Arend, M. (2025). "Solución fiscal óptima bajo una cláusula de escape". *Nota de estudios* N°7, CFA.

Arend, M., Dosque, P., García, A. & Subiabre, G. (2025). "Modelo determinístico de deuda del Gobierno Central de Chile". *Documento de trabajo N°4*. CFA.

Arend, M., Gamboni, C., & Valdés, A. (2019). "Sostenibilidad fiscal y trayectoria de la deuda: Análisis y estimaciones para Chile", *Estudios de Finanzas Públicas*, Dipres.

Arend, M. (2020). "Aplicación de un enfoque de sostenibilidad fiscal a un esquema de Balance estructural". *Nota de estudios* N°3. CFA.

Bohn, H. (1998). The behavior of US public debt and deficits. *The Quarterly Journal of economics*, 113(3), 949-963.

Celasun, O., X. Debrun & J. Ostry (2007). "Primary Surplus Behavior and Risks to Fiscal Sustainability in Emerging Market Countries: A "Fan-Chart" Approach". *IMF Staff Papers*. Vol. 53, No. 3. Washington D.C.

Croce, E., & Juan-Ramon, V. H. (2003). *Assessing Fiscal Sustainability: A Cross-Country Comparison*. IMF Working Papers, 2003(145).

FMI. (2017). *How to calibrate fiscal rules: a primer*. IMF. Washington D.C.

FMI. (2021). *Review of the Debt Sustainability Framework for Market Access Countries*. IMF. Washington D.C.

FMI. (2022). *Staff guidance note on the Sovereign Risk and Debt Sustainability Framework for Market Access Countries*. IMF. Washington D.C.

FMI. (2023). "Chile. Technical assistance report – Fiscal considerations in managing stabilization funds". *IMF Country Report* N°. 23/249, International Monetary Fund, Washington, D.C.

Frank, N. & E. Ley (2009). "On the Probability Approach to Fiscal Sustainability: Structural Breaks and Non-Normality". *IMF Staff Papers*. Vol. 56, No. 4. Washington D.C.

Ghosh, A. R., Kim, J. I., Mendoza, E. G., Ostry, J. D., & Qureshi, M. S. (2013). Fiscal fatigue, fiscal space and debt sustainability in advanced economies. *The Economic Journal*, *123*(566), F4-F30.

Hajdenberg, A. & R. Romeu (2010). "Parameter Estimate Uncertainty in Probabilistic Debt Sustainability Analysis". *IMF Staff Papers*. Vol. 57, No. 1. Washington D.C.

Lenza, M., & Primiceri, G. E. (2020). *How to Estimate a VAR after March 2020* (No. w27771). National Bureau of Economic Research.

Kawakami, K. & R. Romeu (2011). "Identifying Fiscal Policy Transmission in Stochastic Debt Forecasts". *IMF Working Paper*. WP/11/107. Washington D.C.

Lütkepohl, H. (2005). *New introduction to multiple time series analysis*. NY: Springer.

Madeiros, J. (2012). "Stochastic debt simulation using VAR models and a panel fiscal reaction function: results for a selected number of countries". *Economic Papers*, 459. European Commission. Brussels, Belgium.

Tanner, E. & I. Samake (2008). "Probabilistic Sustainability of Public Debt: A Vector Autoregression Approach for Brazil, Mexico, and Turkey". *IMF Staff Papers*. Vol. 55, No. 1. Washington D.C.

Stock, J. H., & Watson, M. W. (2001). Vector autoregressions. *Journal of Economic perspectives*,15(4), 101-115.

# Anexo 1: Determinación de retiros del FEES durante una crisis a partir de un modelo dinámico estocástico

Para estimar los retiros del FEES se realiza un modelo dinámico estocástico del Gobierno Central que considera los activos del Tesoro Público y se divide en dos posibles estados. Un primer estado que llamaremos "tiempos normales", en el que el gasto público evoluciona de acuerdo a la regla fiscal de Balance Estructural y no se retiran recursos del FEES, por lo que las necesidades de financiamiento se cubren mediante endeudamiento público. Y un segundo estado, que llamaremos "situación de crisis", en el que el gasto público opera de manera contracíclica con un uso de los recursos del FEES, lo que se deriva, siguiendo a Arend (2025), de un modelo de optimización del gobierno central del que se obtiene una ecuación de comportamiento del gasto público en periodos de crisis que podemos utilizar para inferir los retiros del FEES. En este sentido, para la "situación de crisis", se asume una cláusula de escape, donde el gasto público podrá exceder lo que determina la regla fiscal con el uso de los recursos del FEES.

### Variables estocásticas

Siguiendo a Arend *et al.* (2019), se consideran tres variables estocásticas, las que son claves en el modelo: el precio del cobre ($\tilde{P}_t$) el PIB real ($\tilde{Y}_t^R$) y la tasa de interés de la deuda del Gobierno Central ($\tilde{\imath}_t^D$), estas variables están correlacionada entre sí y se comportan de forma estocástica al tener shocks aleatorios que distribuyen Normal con media 0 y matriz varianza-covarianza $\Sigma$:

$$\{\xi_t^p, \xi_t^Y, \xi_t^i\} \equiv \xi_t \sim N(0, \Sigma) \qquad (A.1)$$

Donde $\xi_t$ es el vector de shocks aleatorios independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.).

Usando la descomposición de Cholesky de $\Sigma$ tenemos que $\Sigma = WW'$, donde $W$ es la matriz triangular inferior. Utilizando los coeficientes de las regresiones, la matriz $W$ y varios shocks aleatorios independientes e idénticamente distribuidos $\omega_t$, que distribuyen $N(0, I)$, donde $I$ es la matriz identidad, podemos construir a partir del método de Montecarlo las simulaciones de las variables económicas, reemplazando el vector de errores por $\varphi_t = W\omega_t$.

Una vez obtenidas distintas trayectorias para $\tilde{P}_t, \tilde{Y}_t^R, \tilde{\imath}_t^D$, considerando las ecuaciones que describen la regla de Balance Estructural, y en el caso de una "situación de crisis", una ecuación de comportamiento para el gasto público, junto a la restricción presupuestaria intertemporal del sector público se puede obtener las trayectorias para el FEES y los retiros a éste. Es importante destacar la relevancia de considerar la interacción entre las variables económicas, ya que el efecto sobre el FEES no proviene de shocks aislados, sino del efecto conjunto de las variables, que puede amplificarse o reducirse por su interacción. Por ejemplo, en una recesión que afecta negativamente el balance fiscal, es probable que disminuyan las tasas de interés, lo que ayuda a la sostenibilidad fiscal.

### Modelo fiscal en "tiempos normales"

A continuación, se presenta el modelo fiscal, partiendo por la restricción presupuestaria del sector público.

$$\mathrm{D_t} = (1 + i_t^D)\mathrm{D_{t-1}} - B_t^p + A_t^{TP} - (1 + i_t^{TP})A_{t-1}^{TP} + U_\mathrm{t} \qquad (A.2)$$

Donde $i_t^D$ es la tasa de interés nominal de la deuda bruta, $i_t^{TP}$ es la tasa de interés nominal de los activos del Tesoro Público. Se asume un comportamiento exógeno para la deuda bruta y los otros requerimientos de capital.

Los activos del Tesoro Público se dividen en tres tipos: activos del FEES ($A_t^{FEES}$), activos del Fondo de Reserva de Pensiones (FRP) ($A_t^{FRP}$) y otros activos (OATP) ($A_t^{OATP}$), lo que se expresa en la siguiente ecuación:

$$A_t^{TP} = A_t^{FEES} + A_t^{FRP} + A_t^{OATP} \qquad (A.3)$$

La dinámica del FRP se guía de acuerdo a la siguiente regla:

$$\Delta A_t^{FRP} = Y_{t-1} * min\left\{0{,}5\%, max\left\{0\%, \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}}\right\}\right\} \qquad (A.4)$$

Por su parte, se asume que la dinámica de $A_t^{OATP}$ se rige por un promedio móvil de periodos anteriores, de acuerdo a la siguiente ecuación.

$$A_t^{OATP} = Y_t \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{t-j}^{OATP} / Y_{t-j}}{n} \qquad (A.5)$$

Por su parte, la regla de aporte de recursos al FEES está dada por:

$$FEES_t^{aporte} = \begin{cases} Y_{t-1}\left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - 0{,}5\%\right), & si\ \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} > 0{,}5\% \\ 0 \quad , & si\ \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} \leq 0{,}5\% \end{cases} \qquad (A.6)$$

Es decir, en "tiempos normales", según su normativa, el FEES acumulará lo que exceda del 0,5% del balance fiscal como porcentaje del PIB nominal del periodo anterior. Es importante notar que esta regla sólo describe la incorporación de recursos para el FEES, pero no las salidas de recursos, que es parte de la solución completa al sistema al incorporar los retiros en "situación de crisis".

A continuación, se describen las ecuaciones que determinan el balance primario de acuerdo a la regla fiscal.

$$B_t^p = I_t - G'_t \qquad (A.7)$$

Donde, $I_t$ son los ingresos fiscales netos de interés y $G'_t$ son los gastos fiscales netos de interés.

Por el lado de los ingresos, estos se dividen en tres fuentes: (i) ingresos por cobre de Codelco ($I_t^{Codelco}$), (ii) ingresos de la minería privada ($I_t^{MP}$), y (iii) ingresos no cobre ($I_t^{NC}$). Matemáticamente:

$$I_t = I_t^{Codelco} + I_t^{MP} + I_t^{NC} \qquad (A.8)$$

A su vez, cada uno de ellos se puede descomponer en la suma de su parte estructural y su parte cíclica, siendo la primera la relevante para la determinación del gasto público en "tiempos normales". A continuación, se presentan las ecuaciones para cada una de las fuentes de ingresos fiscales.

**Ingresos por cobre de Codelco**

(i.a) Ingreso corriente:

$$I_t^{Codelco} = c_t Q_t^{Codelco} TC_t \qquad (A.9)$$

Donde, $TC_t$ es el tipo de cambio nominal y $Q_t^{Codelco}$ son el volumen de ventas de Codelco.

(i.b) Ingreso estructural:

$$I_t^{Codelco^*} = c_t^* Q_t^{Codelco} TC_t \qquad (A.10)$$

**Ingresos de la minería privada**

(ii.a) Ingreso corriente:

$$I_t^{MP} = \tau^{MP} c_t Q_t^{MP} TC_t \qquad (A.11)$$

Donde, $\tau^{MP}$es la tasa de recaudación promedio para la minería privada y $Q_t^{MP}$ es la producción de cobre de la minería privada.

(ii.b) Ingreso estructural:

$$I_t^{MP^*} = \tau^{MP} c_t^* Q_t^{MP} TC_t \qquad (A.12)$$

**Ingresos no cobre**

(iii.a) Ingreso corriente:

$$I_t^{NC} = \tau^{NC} {Y_t}^{\delta} \qquad (A.13)$$

Donde, $\tau^{NC}$es la tasa de recaudación de los ingresos no cobre y δ es la elasticidad de los ingresos no cobre al PIB nominal.

(iii.b) Ingreso estructural:

$$I_t^{NC^*} = I_t^{NC} \left( \frac{Y_t^*}{Y_t^R} \right) \qquad (A.14)$$

Finalmente, usando la regla de balance cíclicamente ajustado, obtenemos la ecuación para el gasto público.

$$G_t = I_t^{Codelco^*} + I_t^{MP^*} + I_t^{NC^*} - M_t^{est} + \varepsilon_t, \qquad \left\{ \forall\, t \in \mathbb{N} \mid g_t \geq \mathfrak{c} \; o \; \frac{Y_t^R - Y_t^*}{Y_t^R} \geq \mathfrak{r} \right\} \qquad (A.15)$$

Donde, $M_t^{est}$ es la meta de Balance Estructural, $\varepsilon_t$ son ajustes por los ingresos y gastos por intereses y $\mathfrak{c}$ y $\mathfrak{r}$ son parámetros exógenos del modelo.

### Modelo fiscal en "situación de crisis"

Para los periodos en que el estado es "situación de crisis" se asume una cláusula de escape de la meta de Balance Estructural, en que el gasto público podría exceder lo que determina la regla fiscal mediante el uso de recursos del FEES para cubrir el mayor gasto. Para este caso, se realiza un modelo

de optimización del Gobierno Central, del que se obtiene una ecuación de comportamiento del gasto público.

Antes de establecer el problema del Gobierno Central, se estudia el problema de optimización de los consumidores, que entrega una ecuación de Euler de suavización del consumo privado que el gobierno busca apoyar a través de transferencias que mejoran dicha suavización.

**Problema de optimización de los consumidores**

Siguiendo a Arend (2025) se asume que el gobierno toma la solución del siguiente problema de optimización de los consumidores como referencia en su proceso de optimización, por lo que no es necesario asumir un proceso estocástico para el consumo. A continuación, se presenta el problema de optimización para el consumidor.

$$\max_{C_t} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \, U(C_t) \qquad (A.16)$$

Sujeto a:

$$C_t = Y_t^D + A_t^C - S_t \qquad (A.17)$$

$$A_{t+1}^C = (1 + i_t^C) S_t \qquad (A.18)$$

Donde, $C_t$ es el consumo privado real, $Y_t^D$ es el ingreso disponible real de los consumidores, $A_t^C$ son los activos de los consumidores, $S_t$ es el ahorro de los consumidores e $i_t^C$ es la tasa de interés que devengan los activos de los consumidores.

La solución a este problema se puede obtener mediante la optimización de la ecuación de Bellman, la que se expresa de la siguiente manera:

$$v(A_t^C) = \max_{S_t} \left\{ U(Y_t^D + A_t^C - S_t) + \beta \, v\left((1 + i_t^C) S_t\right) \right\} \qquad (A.19)$$

De la condición de primer orden para $S_t$ se obtiene

$$-U'(Y_t^D + A_t^C - S_t) + \beta \, (1 + i_t^C) v'\left((1 + i_t^C) S_t\right) = 0 \qquad (A.20)$$

Y de la condición de la envolvente para $A_t^C$ se obtiene

$$v'(A_t^C) = U'(Y_t^D + A_t^C - S_t) \qquad (A.21)$$

Dado que la condición de primer orden para $S_t$ se cumple en todo momento, usando la condición de la envolvente en ésta se puede obtener la ecuación de Euler de suavización del consumo:

$$U'(C_t) = \beta (1 + i_t^C) U'(C_{t+1}) \qquad (A.22)$$

Al considerar una función de utilidad cardinal dada por $U(C_t) = \frac{{C_t}^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ , se puede reescribir la solución de la siguiente forma:

$$C_{t+1} = [\beta (1 + i_t^C)]^{1/\sigma} \, C_t \qquad (A.22)$$

Lo que se simplifica a

$$C_{t+1} = \psi\, C_t \qquad (A.23)$$

Donde $\psi = [\beta(1 + i_t^C)]^{1/\sigma}$ , para simplificar la simbología en lo que resta del modelo.

Esta última ecuación de suavización del consumo es la que el gobierno intentará apoyar a que se cumpla de mejor manera mediante transferencias a los consumidores en tiempos de crisis mediante una cláusula de escape.

**Problema de optimización del sector público**

Para resolver el problema de optimización del sector público en los periodos de "situación de crisis", que se define que ocurre cuando simultáneamente $g_t < \mathfrak{g}\ y\ \frac{Y_t^R - Y_t^*}{Y_t^R} < \mathfrak{r}$. En este caso el problema se define de la siguiente manera

$$\max_{C_t} E_0 \left( \sum_{t=0}^{\infty} -F(C_t - \psi\, C_{t-1}) \right), \left\{ \forall\, t \in \mathbb{N} \mid g_t < \mathfrak{g}\ y\ \frac{Y_t^R - Y_t^*}{Y_t^R} < \mathfrak{r} \right\} \qquad (A.24)$$

Sujeto a:

$$C_t = Y_t^D + A_t^C - S_t \qquad (A.17)$$

$$Y_t^D = Tr_t + Y_t^O \qquad (A.25)$$

$$Y_t^O = (1 - \tau^O) Y_t^R \qquad (A.26)$$

$$G'_t = Tr_t + O_t \qquad (A.27)$$

$$D_{t+1}^G = (1 + i) D_t^G - I'_t + G'_t + \acute{\omega}_t \qquad (A.28)$$

Donde $Tr_t$ son las transferencias del gobierno a los consumidores en el periodo t, que forman parte del gasto público, $Y_t^O$ son los ingresos de los consumidores que vienen por el lado del producto, $O_t$ es la otra parte del gasto público, $\tau^O$ es la tasa de recaudación del gobierno, $G'_t$ son los gastos fiscales reales netos de interés definidos para el periodo t, $I'_t$ son los ingresos fiscales reales netos de interés definidos para el periodo t, y $\acute{\omega}_t$ es un factor de ajuste de nivel por trabajar en términos reales. Nótese que por simplicidad se asume en cero los otros requerimientos de capital, que el aumento de gasto debido a la "situación de crisis" se financia a través de la reducción de activos del FEES, y se trabaja bajo la restricción presupuestaria intemporal del gobierno para la deuda neta real del gobierno ($D_t^G$).

Las cinco restricciones del problema se pueden simplificar en la ecuación:

$$D_{t+1}^G = (1 + i) D_t^G - I'_t + C_t + O_t - A_t^C + S_t + \acute{\omega}_t - (1 - \tau^O) Y_t^R \qquad (A.29)$$

A continuación, se reescribe el problema del sector público con una ecuación de Bellman con dos variables estado, $C_{t-1}$ y $D_t^G$ y dos variables control, $C_t$ y $D_{t+1}^G$:

$$v(C_{t-1}, D_t^G) = \max_{C_t,\, D_{t+1}^G} -F(C_t - \psi\, C_{t-1}) + E_t v\left(C_t, D_{t+1}^G\right) \qquad (A.30)$$

Reemplazando (A.29) en (A.30) para eliminar $C_t$ de la ecuación se reduce el problema a uno de una variable control:

$$v(C_{t-1}, D_t^G) = \max_{D_{t+1}^G} -F\left(D_{t+1}^G - (1+i)D_t^G + I'_t - O_t + A_t^C - S_t - \acute{\omega}_t + (1-\tau^O)Y_t^R - \psi\, C_{t-1}\right)$$
$$+E_t v\left(D_{t+1}^G - (1+i)D_t^G + I'_t - O_t + A_t^C - S_t - \acute{\omega}_t + (1-\tau^O)Y_t^R, D_{t+1}^G\right) \qquad (A.31)$$

La condición de primer orden para la deuda del siguiente periodo es:

$$\frac{\partial v(C_{t-1}, D_t^G)}{\partial D_{t+1}^G} = -F'(C_t - \psi\, C_{t-1}) + E_t v_1\left(C_t;\ D_{t+1}^G\right) + E_t v_2\left(C_t;\ D_{t+1}^G\right) = 0 \qquad (A.32)$$

Donde $v_1\left(C_t, D_{t+1}^G\right) = \frac{\partial v(C_{t-1}, D_t^G)}{\partial C_t}$ y $v_2\left(C_t;\ D_{t+1}^G\right) = \frac{\partial v(C_{t-1}, D_t^G)}{\partial D_{t+1}^G}$.

Por su parte, las condiciones de la envolvente para $C_{t-1}$ y $D_t^G$ son:

$$v_1(C_{t-1}, D_t^G) = \psi F'(C_t - \psi\, C_{t-1}) \qquad (A.33)$$

$$v_2(C_{t-1}, D_t^G) = (1+i)F'(C_t - \psi\, C_{t-1}) - (1+i)E_t v_1\left(C_t;\ D_{t+1}^G\right) \qquad (A.34)$$

Usando (A.33) y (A.34) en un periodo más y reemplazando dichas ecuaciones en (A.32) se obtiene

$$-F'(C_t - \psi\, C_{t-1}) + E_t \psi F'(C_{t+1} - \psi\, C_t)$$
$$+ E_t(1+i)\left(F'(C_{t+1} - \psi\, C_t) - \psi E_t F'(C_{t+2} - \psi\, C_{t+1})\right) = 0$$

Reorganizando y retrocediendo en un periodo la ecuación se obtiene el resultado

$$F'(C_{t-1} - \psi\, C_{t-2}) - \psi F'(C_t - \psi\, C_{t-1}) = (1+i)\left(F'(C_t - \psi\, C_{t-1}) - \psi F'(C_{t+1} - \psi\, C_t)\right) \ (A.35)$$

Considérese una función cardinal para el planificador central dada por $F(C_t - \psi\, C_{t-1}) = (C_t - \psi\, C_{t-1})^2$, reemplazando ésta en (A.35) se tiene que (véase Arend (2025)):

$$C_{t+1} - C_t = \theta\, C_t - \lambda\, C_{t-1} \qquad (A.36)$$

Donde $\theta = \frac{1+i-\psi-i\psi}{\psi(1+i)}$, $\lambda = 1 - \psi^2$. Para lo que continúa también defina $\mu_t = -\lambda\, C_{t-1}$.

Ahora, utilizando la restricción del consumo privado (A.17) y (A.25) se puede rescribir la solución del problema (A.36) de la siguiente forma:

$$Tr_{t+1} - Tr_t = -\left[Y_{t+1}^O - (1+\theta)Y_t^O\right] + \left[S_{t+1} - (1+\theta)S_t\right] - \left[A_{t+1}^C - (1+\theta)A_t^C\right] + \theta\, Tr_t + \mu_t (A.37)$$

Asumiendo que $Y_{t+1}^O$ crece a una tasa $g^*$ en estado estacionario, además de definir $\omega = \left(\frac{g^* - \theta}{g^*}\right)$, la restricción $Y_t^O = (1-\tau^O)Y_t^\eta$, y la simplificación $\alpha + \acute{\varepsilon}_{t+1} = \left[S_{t+1} - (1+\theta)S_t\right] - \left[A_{t+1}^C - (1+\theta)A_t^C\right] + \theta\, Tr_t + \mu_t$, se obtiene la siguiente ecuación dinámica para las transferencias:

$$Tr_{t+1} - Tr_t = -\omega(1-\tau^O)\left[Y_{t+1}^\eta - Y_t^\eta\right] + \alpha + \acute{\varepsilon}_{t+1} \qquad (A.38)$$

De esta forma, la dinámica del gasto público estará dada por:

$$G'_{t+1} - G'_t = -\omega\,(1-\tau^O)[Y_{t+1}^R - Y_t^R] + O_{t+1} - O_t + \alpha + \acute{\varepsilon}_{t+1} \qquad (A.39)$$

Se puede se reescribir la ecuación anterior dividendo ambos lados por $Y_{t+1}^{R}$. De esta forma, considerando que $\frac{G\prime_t}{Y_t^R} \approx \frac{G_t}{Y_t}$, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$\frac{G_{t+1}}{Y_{t+1}} - \frac{G_t}{Y_{t+1}} \approx -\omega\,(1-\tau^O)\left(\frac{g_{t+1}}{1+g_{t+1}}\right) + \frac{O_{t+1}}{Y_{t+1}^R} - \frac{O_t}{Y_{t+1}^R} + \frac{\alpha}{Y_{t+1}^R} + \frac{\acute{\varepsilon}_{t+1}}{Y_{t+1}^R} \qquad (A.40)$$

Despejando $G_{t+1}$ y retrocediendo la ecuación en un periodo, se puede reescribir (A.40) para el periodo t como:

$$G_t \approx -\omega(1-\tau^O)\left(\frac{g_t}{1+g_t}\right)Y_t + \ddot{G}_t \qquad (A.41)$$

Donde $\ddot{G}_t = \left(\frac{O_t}{Y_t^R} - \frac{O_{t-1}}{Y_t^R} + \frac{\alpha}{Y_t^R} + \frac{\acute{\varepsilon}_t}{Y_t^R} + \frac{G_{t-1}}{Y_t}\right)Y_t$, que es la regla de gasto para los periodos de "situación de crisis".

Cabe destacar que la solución al problema entrega un gasto público contracíclico para el caso de la cláusula de escape, lo que se traduce en un mayor gasto de gobierno en "situación de crisis", cuando se podrá utilizar el FEES de acuerdo a la restricción presupuestaria intertemporal del gobierno.

En resumen, el sistema de ecuaciones que describen la dinámica del FEES y de sus retiros están dadas por

$$\{\xi_t^p, \xi_t^Y, \xi_t^i\} \equiv \xi_t \sim N(0,\Sigma) \qquad (A.1)$$

$$D_t = (1+i_t^D)D_{t-1} - B_t^p + A_t^{TP} - (1+i_t^{TP})A_{t-1}^{TP} + U_t \qquad (A.2)$$

$$A_t^{TP} = A_t^{FEES} + A_t^{FRP} + A_t^{OATP} \qquad (A.3)$$

$$\Delta A_t^{FRP} = Y_{t-1} * min\left\{0{,}5\%, max\left\{0\%, \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}}\right\}\right\} \qquad (A.4)$$

$$A_t^{OATP} = Y_t \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{t-j}^{OATP} / Y_{t-j}}{n} \qquad (A.5)$$

$$FEES_t^{aporte} = \begin{cases} Y_{t-1}\left(\frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} - 0{,}5\%\right), & si\ \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} > 0{,}5\% \\ 0 \quad , & si\ \frac{B_{t-1}}{Y_{t-1}} \leq 0{,}5\% \end{cases} \qquad (A.6)$$

$$B_t^p = I_t - G_t \qquad (A.7)$$

$$I_t = I_t^{Codelco} + I_t^{MP} + I_t^{NC} \qquad (A.8)$$

$$I_t^{Codelco} = c_t Q_t^{Codelco} TC_t \qquad (A.9)$$

$$I_t^{Codelco^*} = c_t^* Q_t^{Codelco} TC_t \qquad (A.10)$$

$$I_t^{MP} = \tau^{MP} c_t Q_t^{MP} TC_t \qquad (A.11)$$

$$I_t^{MP^*} = \tau^{MP} c_t^* Q_t^{MP} TC_t \qquad (A.12)$$

$$I_t^{NC} = \tau^{NC} {Y_t}^{\delta} \qquad (A.13)$$

$$I_t^{NC^*} = I_t^{NC} \left(\frac{Y_t^*}{Y_t^R}\right) \qquad (A.14)$$

$$G_t = I_t^{Codelco^*} + I_t^{MP^*} + I_t^{NC^*} - M_t^{est} + \varepsilon_t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{N} \,/\, g_t \geq \mathfrak{c}\, o\, \frac{Y_t^R - Y_t^*}{Y_t^R} \geq \mathfrak{r} \qquad (A.15)$$

$$G_t \approx -\omega(1 - \tau^O)\left(\frac{g_t}{1 + g_t}\right) \mathrm{Y}_t + \ddot{G}_t, \qquad \left\{\forall\, t \in \mathbb{N} \mid g_t < \mathfrak{c}\, y\, \frac{Y_t^R - Y_t^*}{Y_t^R} < \mathfrak{r}\right\} \qquad (A.41)$$

La calibración de este modelo se basa en Arend (2025) y entrega un valor para $-\omega(1 - \tau^O) \approx 2$. Entonces, la ecuación (A.40) muestra un comportamiento contracíclico del gasto público, donde bajo una "situación de crisis" éste se incrementa en una razón directa a la caída del PIB. Por ejemplo, de esta forma una caída del PIB de un 1% significa un incremento adicional del gasto público de 2 puntos porcentuales del PIB.

Es importante señalar que se define la "situación de crisis" cuando existe un crecimiento del PIB real negativo y una brecha del producto inferior a -3,0% (en todo otro caso, se encuentra en "tiempos normales"). Respecto al criterio para elegir el umbral para la brecha producto los autores mencionados consideraron aquel que incluye a las crisis de los años 1999 y 2009.

CONSEJO
FISCAL
AUTÓNOMO

# Modelo estocástico de la deuda bruta del Gobierno Central de Chile